

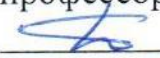
И.Л. Фаустова,
Е.Г. Пахомова



АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Северск, 2025

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Северский технологический институт –
филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(СТИ НИЯУ МИФИ)

Утверждаю
Зав. кафедрой ВМиИТ
профессор
 В. Н. Брендаков
«13» февраля 2025 г.

И.Л. Фаустова, Е.Г. Пахомова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие
по курсу «Математика»
для студентов, обучающихся по направлению подготовки специалитет
14.05.04 "Электроника и автоматика физических установок»
18.05.02 «Химическая технология материалов современной
энергетики» специализации № 1 "Химическая технология материалов
ядерного топливного цикла"

Северск 2025

УДК 514 (075.8)
ББК 22.151.5я73
Ф 288

Авторы:

- Фаустова И. Л. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика и информационные технологии» СТИ НИЯУ МИФИ;
- Пахомова Е. Г. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Компьютерная безопасность» ИПМКН ТГУ;

Рецензенты:

- Брендаков В.Н. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика и информационные технологии» СТИ НИЯУ МИФИ

Фаустова И.Л., Пахомова Е.Г.

Ф 288 Аналитическая геометрия: учебное пособие / И. Л. Фаустова, Е. Г. Пахомова; Северский технологический институт НИЯУ МИФИ – Северск: Издательство СТИ НИЯУ МИФИ, 2025. – Текст: электронный. – 68 с.

Данное учебное пособие содержит теоретический материал по аналитической геометрии по курсу «Математика» для 1 семестра. Учебное пособие нацелено на оказание помощи студентам при выполнении ими контрольных работ и подготовки к экзамену по математике. Материал данного пособия позволяет выработать теоретические и практические навыки по курсу «Математика», рассматриваемого в 1 семестре.

Учебное пособие предназначено для студентов первого курса СТИ НИЯУ МИФИ очной формы обучения по направлению подготовки 14.05.04 "Электроника и автоматика физических установок", 18.05.02 «Химическая технология материалов современной энергетики» специализации № 1 "Химическая технология материалов ядерного топливного цикла".

Одобрено на заседании кафедры высшей математики и информационных технологий СТИ НИЯУ МИФИ и рекомендовано к изданию (протокол № 1 от «17» февраля 2025 г.).

Рег. № 1/25 от 18.02.2025 г.

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ, Северский технологический институт- филиал ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (СТИ НИЯУ МИФИ), 2025

Содержание

1	Аналитическая геометрия на плоскости	4
1.1	Прямая на плоскости	4
1.2	Различные виды уравнения прямой на плоскости.....	8
1.2.1	Параметрические уравнения прямой	8
1.2.2	Каноническое уравнение прямой	9
1.2.3	Уравнение прямой, проходящей через две точки.....	9
1.2.4	Уравнение прямой с угловым коэффициентом	9
1.3	Взаимное расположение прямых на плоскости	11
1.4	Расстояние от точки до прямой	13
1.5	Кривые 2-го порядка	15
1.5.1	Эллипс и окружность	15
1.5.2	Гипербола	19
1.5.3	Парабола	24
1.6	Координаты точки в разных системах координат	27
1.7	Общее уравнение кривой второго порядка	29
2	Аналитическая геометрия в пространстве	35
2.1	Плоскость в пространстве	35
2.1.1	Общее уравнение плоскости	35
2.1.2	Исследование общего уравнения плоскости	37
2.2	Другие формы записи уравнения плоскости	40
2.2.1	Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам.....	40
2.2.2	Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой.....	41
2.3	Взаимное расположение плоскостей.....	41
2.4	Расстояние от точки до плоскости	43
2.5	Прямая в пространстве.....	44
2.5.1	Уравнения прямой в пространстве	44
2.5.2	Переход от общих уравнений прямой к каноническим	46
2.6	Взаимное расположение прямых в пространстве.....	48
2.7	Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве	50
2.8	Поверхности 2-го порядка	52
2.8.1	Эллипсоид	53
2.8.2	Гиперболоиды.....	55
2.8.3	Конус	59
2.8.4	Параболоиды	61
2.8.5	Цилиндры.....	65
	Рекомендуемая литература	68

1 Аналитическая геометрия на плоскости

1.1 Прямая на плоскости

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие линии и поверхности (прямые, плоскости, кривые и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры.

Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат Oxy . Это позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между точкой плоскости и некоторой парой чисел – ее координатами.

Линией на плоскости называют геометрическое место точек $M(x; y)$, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) = 0,$$

где $F(x, y)$ – многочлен степени n . Уравнение $F(x, y) = 0$ называют **общим уравнением** линии, степень многочлена $F(x, y)$ называют **порядком линии**.

Прямая на плоскости является линией первого порядка. Ее общее уравнение

$$Ax + By + C = 0, \quad (1.1)$$

где A, B, C – постоянные коэффициенты, причем A и B не обращаются в ноль одновременно. С геометрической точки зрения A и B – это координаты вектора, перпендикулярного прямой.

Вектор, перпендикулярный прямой, называют **нормальным вектором (нормалью)** этой прямой.

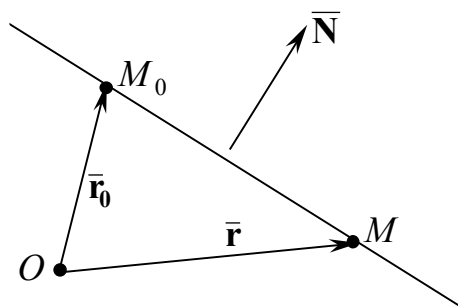
Вектор, параллельный прямой, называется **направляющим вектором** этой прямой.

Получим общее уравнение прямой на плоскости, решив следующую задачу.

ЗАДАЧА 1.1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A, B\}$.

Замечание - Данные задачи определяют прямую однозначно.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой (такую точку мы будем в дальнейшем называть *текущей точкой* прямой). Обозначим через $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ – радиус-векторы точек M_0 и M .



Рассмотрим векторы $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$ и $\bar{N}$. По условию задачи они перпендикулярны. Следовательно, их скалярное произведение равно нулю $(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{N}) = 0$, или, в координатной форме,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (1.2)$$

Уравнению (1.2) удовлетворяют координаты любой точки прямой и не удовлетворяют координаты других точек плоскости. Следовательно, это и есть искомое уравнение.

Уравнение (1.2) называют *уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{N} = \{A, B\}$* .

Воспользуемся свойствами скалярного произведения и перепишем уравнение $(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{N}) = 0$ в виде:

$$(\bar{r}, \bar{N}) - (\bar{r}_0, \bar{N}) = 0.$$

Обозначим число $-(\bar{r}_0, \bar{N}) = -Ax_0 - By_0$ через C . Тогда данное уравнение примет вид:

$$(\bar{r}, \bar{N}) + C = 0,$$

а уравнение (1.2):

$$Ax + By + C = 0.$$

Это уравнение называют *общим уравнением прямой на плоскости*.

Таким образом, прямая на плоскости является линией первого порядка. В общем случае она задается уравнением (1.1), где A, B, C – числа. Причем A и B не обращаются в ноль одновременно, так как с геометрической точки зрения это координаты вектора, перпендикулярного прямой.

Проведем *исследование общего уравнения прямой*.

То есть выясним, что можно сказать о прямой по виду ее общего уравнения.

Если в уравнении (1.1) все коэффициенты A, B и C отличны от нуля, то уравнение называют *полным*; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – уравнение называют *неполным*.

1) Пусть уравнение (1.1) – полное. Тогда его можно записать в виде:

$$Ax + By = -C,$$

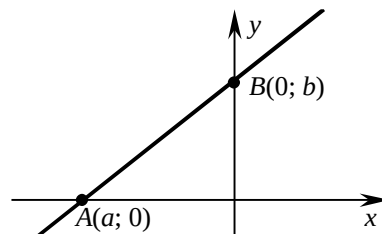
$$\Rightarrow \frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1.$$

Обозначим $-C/A = a$ и $-C/B = b$.

Уравнение прямой примет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (1.3)$$

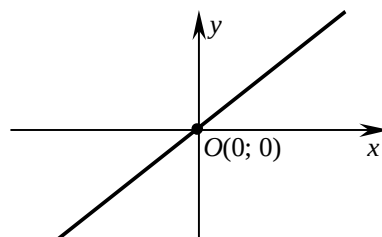
Уравнение (1.3) называют *уравнением прямой в отрезках*. Легко проверить, что прямая, имеющая уравнение (1.3), проходит через точки $A(a; 0)$ и $B(0; b)$. Следовательно, с геометрической точки зрения a и b – отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно. Поэтому уравнение прямой в отрезках удобно использовать при построении прямой.



2) Пусть в уравнении (1.1) коэффициенты A и B – ненулевые, а $C = 0$, т.е. уравнение прямой имеет вид

$$Ax + By = 0.$$

Легко проверить, что такая прямая проходит через начало координат $O(0; 0)$.



3) Пусть в уравнении (1.1) один из коэффициентов A или B – нулевой, а $C \neq 0$, т.е. уравнение прямой имеет вид

$$Ax + C = 0 \quad \text{или} \quad By + C = 0.$$

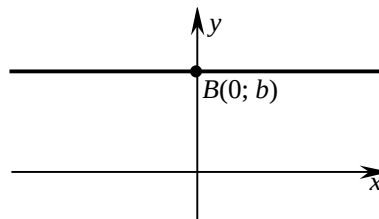
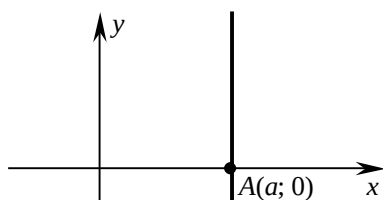
Эти уравнения можно записать в виде

$$x = -\frac{C}{A} \quad \text{и} \quad y = -\frac{C}{B},$$

или

$$x = a \quad \text{и} \quad y = b,$$

где $a = -C/A$ и $b = -C/B$. Легко проверить, что первая из этих прямых проходит параллельно оси Oy через точку $A(a; 0)$, а вторая – параллельно оси Ox через точку $B(0; b)$.



Следовательно, прямая, в уравнении которой отсутствует одна из координат, параллельна оси отсутствующей координаты.

4) Пусть в уравнении (1.1) $C = 0$ и один из коэффициентов A или B тоже нулевой, т.е. уравнение прямой имеет вид

$$Ax = 0 \quad \text{или} \quad By = 0.$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$x = 0 \quad \text{и} \quad y = 0.$$

Но это уравнения координатной оси Oy в первом случае и координатной оси Ox – во втором.

1.2 Различные виды уравнения прямой на плоскости

В аналитической геометрии прямую на плоскости обычно задают общим уравнением (1.1). Но условия задачи могут потребовать записать ее уравнение в другом виде. Два таких вида нам уже встретились (уравнения (1.2) и (1.3)). Рассмотрим, в каком еще виде можно записать уравнение прямой.

1.2.1 Параметрические уравнения прямой

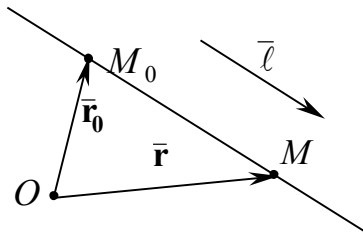
Получим параметрические уравнение прямой на плоскости, решив следующую задачу.

ЗАДАЧА 1.2. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, параллельно вектору $\bar{\ell} = \{m; n\}$.

Замечание - Данные задачи определяют прямую однозначно. Вектор, параллельный прямой, называют *направляющим вектором* этой прямой.

Пусть $M(x, y)$ – текущая точка прямой.

Обозначим через $\bar{r}_0$ и $\bar{r}$ – радиус-векторы точек M_0 и M .



Рассмотрим векторы $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$ и $\bar{\ell}$.

По условию задачи они параллельны. Следовательно, существует такое число t , что

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = t\bar{\ell}, \quad \Rightarrow \quad \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{\ell},$$

или, в координатной форме,

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n. \end{cases} \quad (1.4)$$

Очевидно, что системе (1.4) будут удовлетворять координаты любой точки прямой при некотором значении t (t называют *параметром*) и не будут удовлетворять координаты других точек плоскости.

Систему уравнений (1.4) называют *параметрическими уравнениями прямой*.

1.2.2 Каноническое уравнение прямой

Если в задаче 2 вектор $\vec{\ell}$ не параллелен ни одной из координатных осей (т.е. если $m \neq 0$ и $n \neq 0$), то из уравнений системы (1.4) можно выразить параметр t :

$$t = \frac{x - x_0}{m} \quad \text{и} \quad t = \frac{y - y_0}{n},$$

и заменить систему (1.4) одним уравнением вида:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \quad (1.5)$$

где x_0, y_0 – координаты некоторой точки на прямой, $m; n$ – координаты направляющего вектора прямой.

Уравнение (1.5) называют *каноническим уравнением прямой на плоскости*.

1.2.3 Уравнение прямой, проходящей через две точки

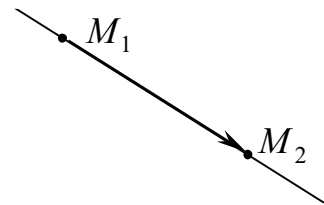
Уравнение прямой, проходящей через две точки, является частным случаем канонического уравнения прямой.

Действительно, пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ является ее направляющим вектором и каноническое уравнение этой прямой будет иметь вид

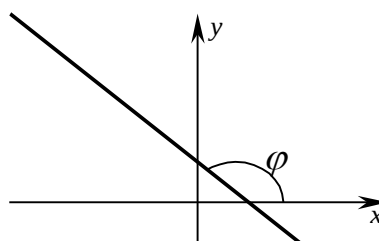
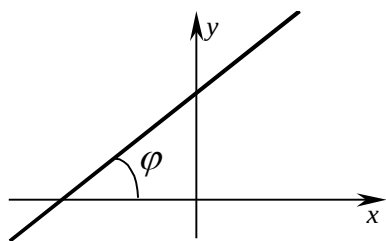
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) называют *уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$* .



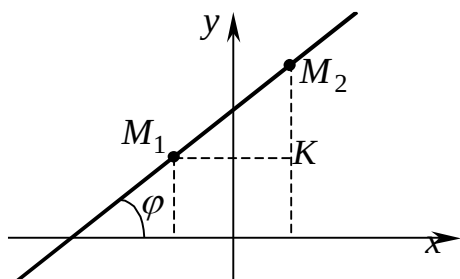
1.2.4 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая ℓ не параллельна оси Ox . Тогда она пересекается с Ox , образуя при этом две пары вертикальных углов. Угол φ , отсчитываемый от оси Ox к прямой ℓ против часовой стрелки, называют *углом наклона прямой ℓ к оси Ox* . При этом число $k = \operatorname{tg} \varphi$ (если оно существует, т.е. если прямая ℓ не параллельна оси Oy) называют *угловым коэффициентом прямой ℓ* .



Для прямой, параллельной оси Ox , угол наклона прямой к оси Ox считают равным нулю. Следовательно, угловым коэффициентом такой прямой $k = \operatorname{tg} 0 = 0$.

Пусть прямая ℓ не параллельна оси Ox и Oy и проходит через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (где $x_1 < x_2$). Найдем угловой коэффициент этой прямой.



Если угол φ острый, то

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{|M_2K|}{|M_1K|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Если угол φ тупой, то

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\pi - \psi) = -\operatorname{tg} \psi = -\frac{|M_1P|}{|M_2P|} = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Итак, в обоих случаях $k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Но тогда из уравнения (1.6)

$$\begin{aligned} \text{получаем:} \quad y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \\ \Rightarrow y - y_1 &= k \cdot (x - x_1). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) – это уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей угловой коэффициент k .

Перепишем уравнение (1.7) в виде

$$y = kx + b, \quad (1.8)$$

где $b = y_1 - kx_1$. Легко убедиться, что с геометрической точки зрения b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy . Уравнение (1.8) называют уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Замечание - Уравнение (1.8) было получено нами в предположении, что прямая не параллельна оси Ox и Oy . Для прямой, параллельной Ox тоже можно записать уравнение с угловым коэффициентом. Действительно, уравнение такой прямой можно записать в виде

$$y = b \text{ или } y = 0 \cdot x + b,$$

где $k = 0$ – угловой коэффициент прямой.

1.3 Взаимное расположение прямых на плоскости

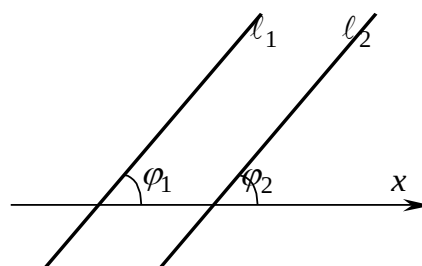
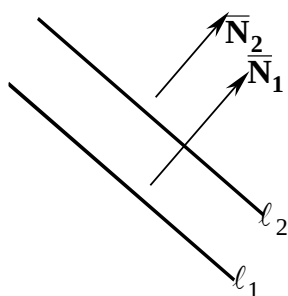
Если на плоскости даны две прямые, то они либо параллельны, либо пересекаются. Выясним, как по уравнениям прямых определить их взаимное расположение.

Пусть уравнения прямых ℓ_1 и ℓ_2 имеют вид:

$$\ell_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{или} \quad y = k_1x + b_1,$$

$$\ell_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \text{или} \quad y = k_2x + b_2.$$

Если прямые параллельны, то, очевидно, что их нормальные векторы $\bar{N}_1 = \{A_1, B_1\}$ и $\bar{N}_2 = \{A_2, B_2\}$ коллинеарны, а углы наклона к оси Ox (φ_1 и φ_2) – равные.



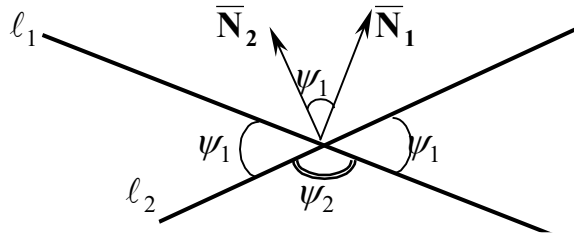
Так как коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты, а $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$ и $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$, то получаем, что *прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих неизвестных пропорциональны, т.е.*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

или их угловые коэффициенты равны, т.е.

$$k_1 = k_2.$$

Теперь рассмотрим пересекающиеся прямые. При пересечении прямых на плоскости образуется две пары вертикальных углов. Выясним, как найти их величину ψ_1 и ψ_2 .



Пусть прямые заданы общими уравнениями:

$$\ell_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad \ell_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

$\Rightarrow \bar{\mathbf{N}}_1 = \{A_1, B_1\}$ и $\bar{\mathbf{N}}_2 = \{A_2, B_2\}$ – нормали к прямым.

Один из углов (ψ_1), образуемых прямыми ℓ_1 и ℓ_2 , равен углу между их нормальными векторами $\bar{\mathbf{N}}_1$ и $\bar{\mathbf{N}}_2$. Второй угол $\psi_2 = \pi - \psi_1$. Следовательно,

$$\cos \psi_1 = \frac{(\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2)}{|\bar{\mathbf{N}}_1| \cdot |\bar{\mathbf{N}}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}}$$

и

$$\cos \psi_2 = -\cos \psi_1 = -\frac{(\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2)}{|\bar{\mathbf{N}}_1| \cdot |\bar{\mathbf{N}}_2|} = -\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}}.$$

Объединив эти две формулы получим, что, если прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы общими уравнениями, то углы между ними можно найти по формуле

$$\cos \psi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2)|}{|\bar{\mathbf{N}}_1| \cdot |\bar{\mathbf{N}}_2|} = \pm \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}}, \quad (1.9)$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Частный случай пересекающихся прямых – перпендикулярные прямые. Из формулы (1.9) легко получить критерий перпендикулярности прямых, заданных общими уравнениями. Действительно, если ℓ_1 и ℓ_2 перпендикулярны, то

$$\psi_1 = \psi_2 = 90^\circ \quad \text{и} \quad \cos \psi_{1,2} = 0.$$

Но тогда по формуле (1.9) имеем:

$(\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2) = A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ – критерий перпендикулярности прямых, заданных общими уравнениями.

Теперь рассмотрим случай, когда пересекающиеся прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом:

$$\ell_1: y = k_1x + b_1 \quad \text{и} \quad \ell_2: y = k_2x + b_2.$$

Острый угол между прямыми будет равен

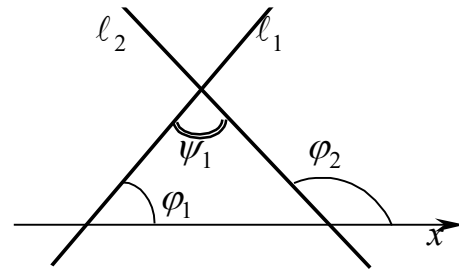
$$\psi_1 = |\varphi_2 - \varphi_1|.$$

Но тогда

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \operatorname{tg} |\varphi_2 - \varphi_1| = |\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)|,$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \psi_1 = \left| \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1} \right|,$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \psi_1 = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|.$$



Так как тупой угол между прямыми $\psi_2 = \pi - \psi_1$, то

$$\operatorname{tg} \psi_2 = \operatorname{tg}(\pi - \psi_1) = -\operatorname{tg} \psi_1 = -\left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|.$$

Следовательно, если прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом, то углы между ними можно найти по формуле

$$\operatorname{tg} \psi_{1,2} = \pm \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|, \quad (1.10)$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Из формулы (1.10) легко получить критерий перпендикулярности прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом. Действительно, если ℓ_1 и ℓ_2 перпендикулярны, то

$$\psi_1 = \psi_2 = 90^\circ \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \psi_{1,2} \text{ не существует.}$$

Но это означает, что знаменатель дроби в (1.10) обращается в ноль, т.е.

$$1 + k_2 \cdot k_1 = 0,$$

$$\Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad \text{– критерий перпендикулярности}$$

прямых, имеющих угловые коэффициенты k_1 и k_2 .

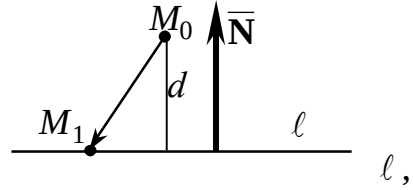
1.4 Расстояние от точки до прямой

Заканчивая рассматривать прямую на плоскости, решим следующую задачу.

ЗАДАЧА 1.3. Пусть прямая ℓ задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, $M_0(x_0, y_0)$ – точка, не принадлежащая этой прямой. Найти расстояние от точки M_0 до прямой ℓ .

Эта задача может быть решена несколькими способами. Рассмотрим решение, основанное на знании формул векторной алгебры.

Пусть $\bar{N} = \{A, B\}$ – нормальный вектор прямой ℓ , $M_1(x_1, y_1)$ – любая точка на прямой ℓ , d – расстояние от точки M_0 до ℓ . Тогда



$$d = \left| \text{Пр}_{\bar{N}} \overline{M_1 M_0} \right| = \left| \frac{(\bar{N}, \overline{M_1 M_0})}{|\bar{N}|} \right| = \frac{|(\bar{N}, \overline{M_1 M_0})|}{|\bar{N}|}.$$

Имеем: $\bar{N} = \{A, B\}$, $\overline{M_1 M_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1\}$

$$\Rightarrow |\bar{N}| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

и $(\bar{N}, \overline{M_1 M_0}) = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1)$.

Так как $M_1(x_1, y_1)$ – точка на прямой ℓ , то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е.

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + C &= 0. \\ \Rightarrow Ax_1 + By_1 &= -C, \\ \Rightarrow (\bar{N}, \overline{M_1 M_0}) &= Ax_0 + By_0 + C. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$d = \frac{|(\bar{N}, \overline{M_1 M_0})|}{|\bar{N}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1.11)$$

Таким образом, если известно общее уравнение прямой, то расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до этой прямой может быть найдено по формуле (1.11).

1.5 Кривые 2-го порядка

Кривые второго порядка делятся на два класса: 1) вырожденные и 2) невырожденные.

Вырожденные кривые второго порядка – это прямые и точки, которые задаются уравнением второй степени. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет на плоскости точку – начало координат. А уравнение $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ определяет на плоскости прямую $x - y = 0$.

Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка плоскости, то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную кривую (мнимую кривую второго порядка).

Невырожденными кривыми второго порядка являются эллипс, окружность, гипербола и парабола. Убедимся в этом, получив их уравнения.

1.5.1 Эллипс и окружность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2 есть величина постоянная и равная $2a$ ($2a > |F_1F_2|$).

Точки F_1 и F_2 называют **фокусами** эллипса.

Получим уравнение эллипса. Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от начала координат. В такой системе координат точки F_1 и F_2 будут иметь координаты:

$$F_1(-c; 0) \quad \text{и} \quad F_2(c; 0),$$

где $|OF_1| = |OF_2| = c$. Пусть $M(x, y)$ – текущая точка эллипса. По определению эллипса имеем:

$$\begin{aligned} |F_1M| + |F_2M| &= 2a, \\ \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a. \end{aligned}$$

Избавимся от квадратных корней:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ \Rightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2, \\ \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Приведя подобные слагаемые, получим:

$$4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc.$$

Снова возведем обе части в квадрат и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} & \left(a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 = (a^2 - xc)^2, \\ \Rightarrow & a^2 \cdot ((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2x \cdot c + x^2 \cdot c^2, \\ \Rightarrow & a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2, \\ \Rightarrow & (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2. \end{aligned}$$

Так как по определению $2a > 2c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Следовательно, $a^2 - c^2 = b^2$, для некоторого числа b , и последнее равенство примет вид:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2.$$

Разделим обе части этого равенства на b^2a^2 и окончательно получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) называется **каноническим уравнением эллипса**. Система координат, в которой эллипс имеет такое уравнение, называется его **канонической системой координат**.

Итак, мы убедились, что эллипс является кривой второго порядка. Теперь выясним геометрический вид эллипса. Для этого проведем исследование его канонического уравнения.

1) Прежде всего заметим, что эллипс лежит внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.

$$\begin{aligned} \text{Действительно, так как } \frac{x^2}{a^2} \geq 0, \frac{y^2}{b^2} \geq 0 \text{ и } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ то} \\ \frac{x^2}{a^2} \leq 1, \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \\ \Rightarrow x^2 \leq a^2, y^2 \leq b^2, \\ \Rightarrow |x| \leq a, |y| \leq b. \end{aligned}$$

2) Эллипс имеет центр симметрии (начало координат) и две оси симметрии (оси Ox и Oy).

Действительно, если $M(x, y)$ – точка эллипса, то кроме равенства (1.12) будут справедливы также равенства

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 1.$$

Следовательно, на эллипсе лежат точки $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$, $M_3(-x, -y)$, которые симметричны точке $M(x, y)$ относительно оси Ox , Oy и начала координат соответственно.

Центр симметрии эллипса называют **центром эллипса**. Ось симметрии эллипса, проходящую через фокусы (ось Ox) называют **большой** (или фокальной) осью симметрии, а вторую ось (ось Oy) – **малой** осью.

3) Из уравнения эллипса получаем:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Следовательно, верхняя половина эллипса – график функции $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, нижняя – график функции $y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. В силу симметрии верхней и нижней половины достаточно провести исследование одной из этих функций.

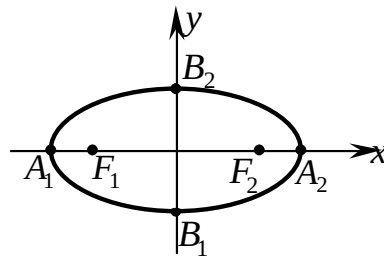
Исследуем поведение функции $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ методами, разработанными в математическом анализе:

а) $D(y) = [-a; a]$, $y(\pm a) = 0$;

б) $y' = \frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right)$. Следовательно, функция возрастает при $x \in (-a; 0)$ ($y' > 0$), убывает – при $x \in (0; a)$ ($y' < 0$), имеет экстремум в точке $x = 0$ (максимум, $y(0) = b$);

в) $y'' = -\frac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} < 0$. Следовательно, график функции всюду выпуклый.

На основании полученных данных построим эллипс в верхней полуплоскости, а затем симметрично достроим его в нижней полуплоскости:



Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются **вершинами эллипса**. Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются **большой (фокальной) осью**, отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ – **малой осью**. Величины a и b называются **большой** и **малой полуосью** соответственно. Длина отрезка F_1F_2 (равная $2c$) называется **фокусным расстоянием**. Если M – произвольная точка эллипса, то отрезки MF_1, MF_2 и их длины r_1, r_2 называются **фокальными радиусами точки M** .

Замечание - Прямая A_1A_2 , отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ носят одно название. О чем идет речь – всегда ясно из контекста. То же самое касается B_1B_2 , MF_1 , MF_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Величина ε , равная отношению фокусного расстояния эллипса к его большой оси, т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

называется **эксцентриситетом эллипса**.

Так как $c = \sqrt{a^2 - b^2} < a$, то $0 < \varepsilon < 1$. Величина ε характеризует форму эллипса.

Действительно,

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{c}{a} &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \\ \Rightarrow \frac{b}{a} &= \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, чем больше ε , тем меньше отношение $\frac{b}{a}$, т.е. тем больше вытянут эллипс вдоль действительной оси.

Кроме того, зная эксцентриситет эллипса легко найти фокальные радиусы точки $M(x, y)$:

$$r_1 = |MF_1| = a + \varepsilon x, \quad r_2 = |MF_2| = a - \varepsilon x.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(-c - x)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{c^2 + 2cx + x^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{(a^2 - b^2) + 2cx + x^2 + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right)} = \sqrt{a^2 + 2cx + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a^4 + 2ca^2x + (a^2 - b^2)x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^4 + 2ca^2x + c^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + cx)^2}{a^2}} = \\ &= \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2} = \sqrt{(a + \varepsilon x)^2} = |a + \varepsilon x| = a + \varepsilon x \end{aligned}$$

Аналогично доказывается вторая формула.

Замечания -

1) Пусть в уравнении эллипса $a = b = r$. Для этой кривой

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 - b^2} = 0, \\ \Rightarrow F_1 &= F_2 = O, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = 0. \end{aligned}$$

Геометрически, это означает, что точки такой кривой равноудалены (на расстояние r) от ее центра O , т.е. кривая является **окружностью**. Каноническое уравнение окружности принято записывать в виде

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

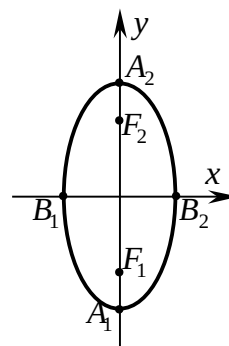
где r – расстояние от любой точки окружности до ее центра; r называют **радиусом окружности**.

2) Выводя уравнение эллипса, мы выбрали систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от начала координат. Если же выбрать систему координат так, чтобы фокусы были на одинаковом расстоянии от начала координат, но лежали на оси Oy , то уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Для этого эллипса большая ось – ось Oy , малая ось – ось Ox , фокусы имеют координаты $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$ (где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$), фокальные радиусы точки $M(x, y)$ находятся по формулам

$$r_1 = |MF_1| = a + \varepsilon y, \quad r_2 = |MF_2| = a - \varepsilon y.$$



1.5.2 Гипербола

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2 есть величина постоянная и равная $2a$ ($2a < |F_1F_2|$).

Точки F_1 и F_2 называют **фокусами** гиперболы.

Получим уравнение гиперболы. Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от начала координат. В такой системе координат точки F_1 и F_2 будут иметь координаты:

$$F_1(-c; 0) \quad \text{и} \quad F_2(c; 0),$$

где $|OF_1| = |OF_2| = c$. Пусть $M(x, y)$ – текущая точка гиперболы. По определению гиперболы имеем:

$$\begin{aligned} & \left| |F_1M| - |F_2M| \right| = 2a, \\ \Rightarrow & \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

Избавимся от квадратных корней:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ \Rightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 &= \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2, \\ \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Приведа подобные слагаемые, получим:

$$\pm 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4xc - 4a^2.$$

Снова возведем обе части в квадрат и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} \left(\pm a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 &= (xc - a^2)^2, \\ \Rightarrow a^2 \cdot ((x-c)^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2x \cdot c + x^2 \cdot c^2, \\ \Rightarrow c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4, \\ \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= (c^2 - a^2)a^2. \end{aligned}$$

Так как по определению $2a < 2c$, то $c^2 - a^2 > 0$. Следовательно, $c^2 - a^2 = b^2$, для некоторого числа b , и последнее равенство примет вид:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = b^2a^2.$$

Разделим обе части этого равенства на b^2a^2 и окончательно получим:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) называется **каноническим уравнением гиперболы**. Система координат, в которой гипербола имеет такое уравнение, называется ее **канонической системой координат**.

Итак, мы убедились, что гипербола является кривой второго порядка. Теперь выясним геометрический вид гиперболы. Для этого проведем исследование ее канонического уравнения.

1) Прежде всего заметим, что точек гиперболы нет в полосе, ограниченной прямыми $x = \pm a$.

$$\begin{aligned} \text{Действительно, так как } \frac{x^2}{a^2} \geq 0, \frac{y^2}{b^2} \geq 0 \text{ и } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ то } \frac{x^2}{a^2} &\geq 1, \\ \Rightarrow x^2 &\geq a^2, \\ \Rightarrow |x| &\geq a. \end{aligned}$$

2) Гипербола имеет центр симметрии (начало координат) и две оси симметрии (оси Ox и Oy).

Действительно, если $M(x, y)$ – точка гиперболы, то кроме равенства (1.13) будут справедливы также равенства

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = 1.$$

Следовательно, на гиперболе лежат точки $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$, $M_3(-x, -y)$, которые симметричны точке $M(x, y)$ относительно оси Ox , Oy и начала координат соответственно.

Центр симметрии гиперболы называют **центром гиперболы**. Ось симметрии гиперболы, проходящую через фокусы (ось Ox) называют **действительной** (или **фокальной**) **осью симметрии**, а вторую ось (ось Oy) – **мнимой осью**.

3) Из уравнения гиперболы получаем:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Следовательно, верхняя половина гиперболы – график функции $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, нижняя – график функции $y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. В силу симметрии верхней и нижней половины достаточно провести исследование одной из этих функций.

Исследуем поведение функции $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ методами, разработанными в математическом анализе:

а) $D(y) = (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$, $y(\pm a) = 0$;

б) Линия $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ имеет наклонные асимптоты¹ $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Действительно,

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{b}{a} |x|}{x} = \pm \frac{b}{a},$$

$$b_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - k_{1,2}x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{b}{a} [\sqrt{x^2 - a^2} \mp x] = \frac{b}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} \pm x} = 0.$$

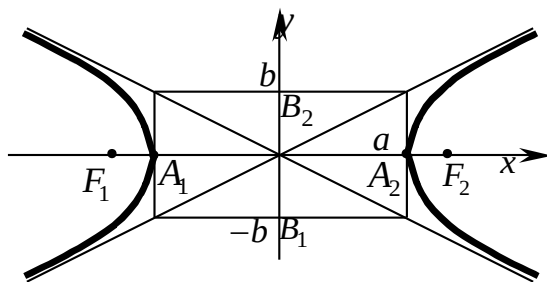
¹ Напомним, что прямая ℓ называется **асимптотой кривой**, если расстояние от точки M кривой до прямой ℓ стремится к нулю при удалении точки M от начала координат. Различают два вида асимптот – вертикальные и наклонные. Вертикальные асимптоты кривая $y = f(x)$ имеет в тех точках разрыва второго рода функции $y = f(x)$, в которых хотя бы один из односторонних пределов функции равен бесконечности. Наклонные асимптоты кривой $y = f(x)$ имеют уравнение

$$y = k_{1,2}x + b_{1,2}, \text{ где } k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - k_{1,2}x].$$

в) $y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. Следовательно, функция возрастает при $x \in (a; +\infty)$ ($y' > 0$), убывает – при $x \in (-\infty; -a)$ ($y' < 0$). Экстремумов функция не имеет (критические точки $x = 0 \notin D(y)$ и $x = \pm a$ – граничные).

в) $y'' = \frac{-ab}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} < 0 \Rightarrow$ график функции всюду выпуклый.

На основании полученных данных построим гиперболу в верхней полуплоскости, а затем симметрично достроим ее в нижней полуплоскости:



Точки A_1, A_2 называются **вершинами гиперболы**. Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются **действительной (фокальной) осью**, отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ – **мнимой осью**. Величины a и b называются **действительной** и **мнимой полуосью** соответственно. Длина отрезка F_1F_2 (равная $2c$) называется **фокусным расстоянием**. Если M – произвольная точка эллипса, то отрезки MF_1, MF_2 и их длины r_1, r_2 называются **фокальными радиусами точки M**

Замечание - Прямая A_1A_2 , отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ носят одно название. О чем идет речь – всегда ясно из контекста. То же самое касается B_1B_2, MF_1, MF_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Величина ε , равная отношению фокусного расстояния гиперболы к ее действительной оси, т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

называется **эксцентриситетом гиперболы**.

Так как $c = \sqrt{a^2 + b^2} > a$, то $\varepsilon > 1$. Величина ε характеризует форму гиперболы. Действительно,

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{c}{a} &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \\ \Rightarrow \frac{b}{a} &= \sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \end{aligned}$$

Следовательно, чем больше ε , тем больше отношение b/a , т.е. тем «шире» гипербола.

Кроме того, зная эксцентриситет гипербола, легко найти фокальные радиусы точки $M(x, y)$. Так, если точка M лежит на правой ветке гипербола (т.е. $x > 0$), то

$$r_1 = |MF_1| = a + \varepsilon x, \quad r_2 = |MF_2| = -a + \varepsilon x.$$

Если M лежит на левой ветке гипербола (т.е. $x < 0$), то

$$r_1 = |MF_1| = -(a + \varepsilon x), \quad r_2 = |MF_2| = -(-a + \varepsilon x).$$

Действительно, пусть $x > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(-c-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{c^2 + 2cx + x^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2) + 2cx + x^2 + \left(\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2\right)} = \sqrt{a^2 + 2cx + \left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right)x^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a^4 + 2ca^2x + (a^2 + b^2)x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^4 + 2ca^2x + c^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + cx)^2}{a^2}} = \\ &= \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2} = \sqrt{(a + \varepsilon x)^2} = |a + \varepsilon x| = a + \varepsilon x \end{aligned}$$

Аналогично доказываются и оставшиеся формулы.

Замечания -

1) Если в уравнении гипербола $a = b$, то гипербола называется **равнобочной**. Асимптоты равнобочной гипербола, очевидно, перпендикулярны. Следовательно, можно выбрать систему координат так, чтобы координатные оси совпали с асимптотами. Тогда уравнение гипербола будет иметь вид

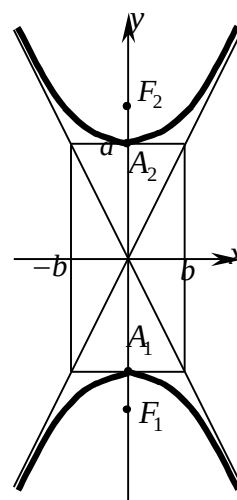
$$xy = 0,5a^2. \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) называют **уравнением равнобочной гипербола, отнесенной к асимптотам**.

2) Выводя уравнение гипербола, мы выбрали систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от начала координат. Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы были на одинаковом расстоянии от $O(0;0)$, но лежали на Oy , то уравнение гипербола будет иметь вид

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Для этой гипербола действительная ось – ось Oy , мнимая ось – ось Ox , фокусы имеют координаты $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$ (где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$), асимптотами являются



прямые $y = \pm \frac{a}{b} x$, фокальные радиусы точки $M(x, y)$ находятся по формулам

$$r_1 = |MF_1| = a + \varepsilon y, \quad r_2 = |MF_2| = -a + \varepsilon y \quad (\text{при } y > 0)$$

и $r_1 = |MF_1| = -(a + \varepsilon y), \quad r_2 = |MF_2| = -(-a + \varepsilon y) \quad (\text{при } y < 0).$

1.5.3 Парабола

Пусть ℓ – некоторая прямая на плоскости, F – некоторая точка плоскости, не лежащая на прямой ℓ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, расстояние от которых до фиксированной прямой ℓ и до фиксированной точки F (не лежащей на прямой ℓ) одинаково.

Точку F называют **фокусом параболы**, прямую ℓ – **директрисой**.

Получим уравнение параболы. Пусть p – расстояние от F до ℓ . Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы директриса параболы ℓ была перпендикулярна оси Ox , фокус F лежал на положительной части Ox и расстояние от начала координат до фокуса и до директрисы было одинаковым. В такой системе координат

$$F(0,5p; 0) \quad \text{и} \quad \ell: x + 0,5p = 0.$$

Пусть $M(x, y)$ – текущая точка параболы. По определению параболы

$$d(M, \ell) = |FM|,$$

$$\text{т.е.} \quad \frac{|x + 0,5p|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \sqrt{(x - 0,5)^2 + y^2},$$

$$\Rightarrow |x + 0,5p| = \sqrt{(x - 0,5)^2 + y^2}.$$

Избавимся от квадратного корня:

$$(x + 0,5p)^2 = (x - 0,5)^2 + y^2,$$

$$\Rightarrow y^2 = 2px \tag{1.15}$$

Уравнение (1.15) называется **каноническим уравнением параболы**. Система координат, в которой парабола имеет такое уравнение, называется ее **канонической системой координат**.

Итак, мы убедились, что парабола является кривой второго порядка. Теперь выясним геометрический вид параболы. Для этого проведем исследование ее канонического уравнения.

1) Прежде всего, очевидно, что парабола лежит в полуплоскости $x \geq 0$ (т.к. $y^2 \geq 0$ и $p > 0$).

2) Парабола имеет ось симметрии (ось Ox).

Действительно, если $M(x, y)$ – точка параболы, то кроме равенства (1.15) будет справедливо также равенство

$$(-y)^2 = 2px.$$

Следовательно, на параболе лежит точка $M_1(x, -y)$, которая симметрична точке $M(x, y)$ относительно оси Ox .

Ось симметрии параболы называют **осью параболы**.

3) Из уравнения параболы получаем:

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Следовательно, верхняя половина параболы – график функции $y = \sqrt{2px}$, нижняя – график функции $y = -\sqrt{2px}$. В силу симметрии верхней и нижней половины достаточно провести исследование одной из этих функций.

Исследуем поведение функции $y = \sqrt{2px}$ методами, разработанными в математическом анализе:

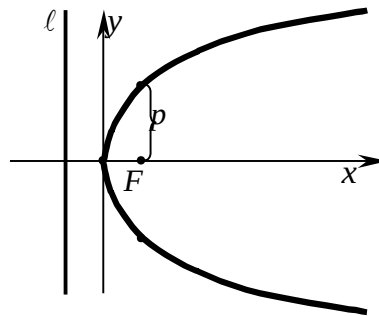
а) $D(y) = [0; +\infty)$, $y(0) = 0$;

б) асимптот нет (проверить самим);

в) $y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} > 0$. Следовательно, функция возрастает на всей области определения;

г) $y'' = -\frac{\sqrt{2p}}{4\sqrt{x^3}} < 0$. Следовательно, график функции всюду выпуклый.

На основании полученных данных построим параболу в верхней полуплоскости, а затем достроим ее в нижней полуплоскости:



Точка, в которой парабола пересекает свою ось, называется **вершиной параболы**, число p называется **параметром параболы**. Если M – произвольная точка параболы, то отрезок MF и его длина называются **фокальными радиусами точки M** .

Замечание - Если при выводе уравнения параболы выбрать систему координат так, чтобы фокус F лежал на отрицательной части оси Ox ,

директриса была перпендикулярна оси Ox , и расстояние от начала координат до фокуса и до директрисы было одинаково (рис. 1), то получим для параболы уравнение

$$y^2 = -2px, \quad (1.16)$$

а для директрисы и фокуса:

$$F(-0,5p; 0) \quad \text{и} \quad \ell : x - 0,5p = 0.$$

Если выбрать систему координат так, чтобы директриса была перпендикулярна оси Oy , фокус лежал на положительной (отрицательной) части оси Oy и начало координат было на одинаковом расстоянии от фокуса и от директрисы (рис. 2 и рис. 3), то уравнение параболы будет иметь вид

$$x^2 = \pm 2py, \quad (1.17)$$

а для директрисы и фокуса:

$$F(0; \pm 0,5p) \quad \text{и} \quad \ell : y \pm 0,5p = 0.$$

Уравнения (1.16) и (1.17) тоже называются **каноническими уравнениями параболы**, а соответствующие им системы координат – **каноническими системами координат**.

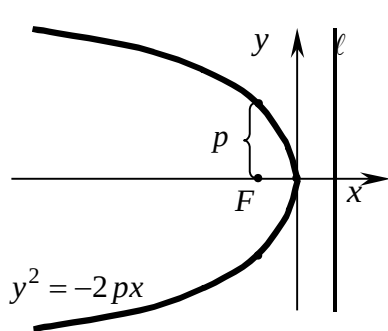


рис. 1

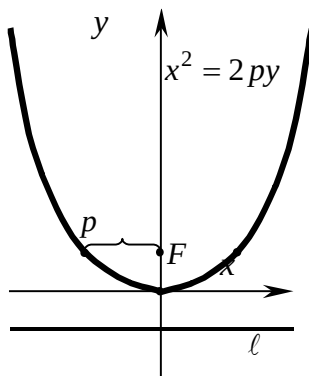


рис. 2

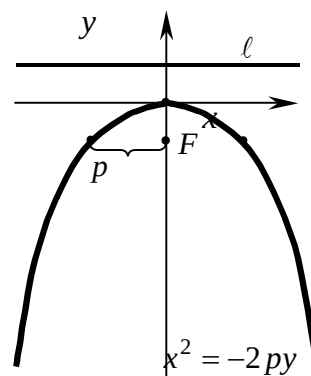


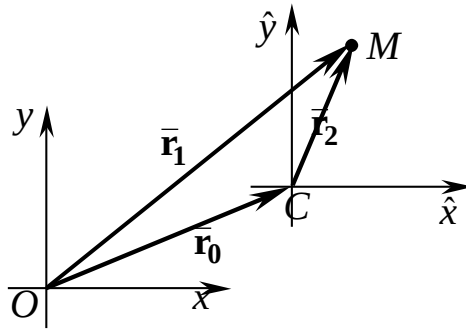
рис. 3

1.6 Координаты точки в разных системах координат

Пусть на плоскости заданы две декартовы прямоугольные системы координат. Выясним, существует ли связь между координатами точки в этих системах координат.

а) Пусть заданы декартовы прямоугольные системы координат xOy и $\hat{x}C\hat{y}$ такие, что $Ox \uparrow\uparrow C\hat{x}$, $Oy \uparrow\uparrow C\hat{y}$ («параллельные системы координат»). Возьмем на плоскости произвольную точку M и обозначим $\bar{\mathbf{r}}_0 = \overline{OC}$, $\bar{\mathbf{r}}_1 = \overline{OM}$, $\bar{\mathbf{r}}_2 = \overline{CM}$. Имеем:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}}_1 &= \bar{\mathbf{r}}_2 + \bar{\mathbf{r}}_0, \\ \Rightarrow \bar{\mathbf{r}}_2 &= \bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_0.\end{aligned}\tag{1.18}$$



Пусть $M(x, y)$ (в системе координат xOy) $\Rightarrow \bar{\mathbf{r}}_1 = \{x; y\}$,

$M(\hat{x}, \hat{y})$ (в системе координат $\hat{x}C\hat{y}$) $\Rightarrow \bar{\mathbf{r}}_2 = \{\hat{x}; \hat{y}\}$,

$C(x_0, y_0)$ (в системе координат xOy) $\Rightarrow \bar{\mathbf{r}}_0 = \{x_0; y_0\}$.

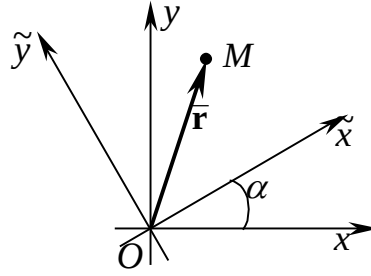
Тогда из (1.18) получаем:

$$\begin{cases} \hat{x} = x - x_0, \\ \hat{y} = y - y_0 \end{cases}\tag{1.19}$$

Формулы (1.19) называют **формулами преобразования координат точки при переносе начала координат в точку $C(x_0, y_0)$** .

б) Пусть заданы декартовы прямоугольные системы координат xOy и $\tilde{x}O\tilde{y}$ такие, что $\widehat{Ox, O\tilde{x}} = \widehat{Oy, O\tilde{y}} = \alpha$ («развернутые системы координат»).

Возьмем на плоскости произвольную точку M и обозначим $\bar{\mathbf{r}} = \overline{OM}$.



Пусть $M(x, y)$ (в системе координат xOy) и $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ (в системе координат $\tilde{x}O\tilde{y}$). Тогда

$$\bar{\mathbf{r}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \tilde{x}\bar{\mathbf{c}}_1 + \tilde{y}\bar{\mathbf{c}}_2,$$

где $\bar{\mathbf{c}}_1 \uparrow\uparrow O\tilde{x}$, $\bar{\mathbf{c}}_2 \uparrow\uparrow O\tilde{y}$ и $|\bar{\mathbf{c}}_1| = |\bar{\mathbf{c}}_2| = 1$. Координаты вектора в разных базисах связаны формулой

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

где $\mathbf{T}$ – матрица перехода от базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ к базису $\bar{\mathbf{c}}_1, \bar{\mathbf{c}}_2$. Запишем матрицу $\mathbf{T}$. Имеем:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{c}}_1 = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \sin \alpha \cdot \mathbf{j}, \\ \bar{\mathbf{c}}_2 = -\sin \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \alpha \cdot \mathbf{j}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

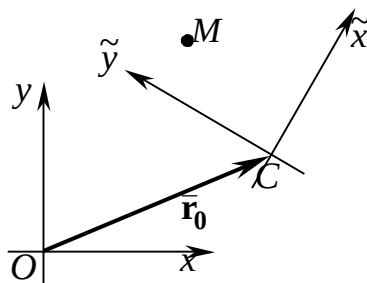
Таким образом, получаем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y, \\ \tilde{y} = -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y. \end{cases} \quad (1.22)$$

Формулы (1.22) называют **формулами преобразования координат точки при повороте координатных осей**.

в) Пусть заданы декартовы прямоугольные системы координат xOy и $\tilde{x}C\tilde{y}$ такие, что $\widehat{Ox, C\tilde{x}} = \widehat{Oy, C\tilde{y}} = \alpha$.



Если $M(x, y)$ (в системе координат xOy),

$M(\tilde{x}, \tilde{y})$ (в системе координат $\tilde{x}C\tilde{y}$)

$C(x_0, y_0)$ (в системе координат xOy),

то из формул (1.22) и (1.19) получаем:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y - x_0, \\ \tilde{y} = -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y - y_0. \end{cases} \quad (1.23)$$

Формулы (1.23) называют **формулами преобразования координат точки при переходе к новой системе координат**.

1.7 Общее уравнение кривой второго порядка

а) Рассмотрим уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (1.24)$$

С помощью элементарных преобразований уравнение (1.24) может быть приведено к следующему виду.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ при } AC \neq 0: \quad \frac{(x-x_0)^2}{\alpha} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta} = 1; \\ 2) \text{ при } AC = 0: \quad (x-x_0)^2 = \alpha(y-y_0) \text{ или } (y-y_0)^2 = \alpha(x-x_0) \end{array} \right\} (1.25)$$

Это означает, что уравнение (1.24) определяет кривую, для которой канонической является система координат $\hat{x}\hat{y}$, где $C(x_0; y_0)$ (см. формулы (1.19) преобразования координат при переносе начала координат). Поэтому говорят, что **уравнение (1.24) определяет кривую со смещенным центром (вершиной)**, а уравнение (1.25) называют **каноническим уравнением кривой со смещенным центром (вершиной)**.

Замечание - Приводить уравнение (1.24) к виду (1.25) необходимо, если мы хотим построить кривую. Тип кривой можно определить и без уравнения (1.25). А именно:

- 1) если $AC = 0$, то кривая является параболой;
- 2) если $AC < 0$, то кривая является гиперболой;
- 3) если $AC > 0$, $A \neq C$ – эллипсом;
- 4) если $AC > 0$, $A = C$ – окружностью.

6) Рассмотрим уравнение

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0. \quad (1.26)$$

Это уравнение определяет кривую, каноническая система координат которой развернута по отношению к заданной на некоторый угол α . Покажем один из способов найти этот угол.

Для начала напомним, что поворот координатных осей можно рассматривать как переход к новому базису в пространстве свободных векторов $V^{(2)}$ (см. предыдущий пункт этого параграфа). Следовательно, найти угол α означает найти базис $\bar{c}_1, \bar{c}_2$, соответствующий канонической системе координат кривой (1.26).

Запишем матрицу $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$. Ее можно рассматривать как матрицу некоторого оператора φ пространства $V^{(2)}$. Доказано, что оператор про-

пространства $V^{(2)}$, имеющий в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ симметрическую матрицу, диагонализировав. Т.е., существует базис $\bar{\mathbf{c}}_1, \bar{\mathbf{c}}_2$, в котором матрица оператора φ имеет вид $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Более того, доказано, что эти векторы можно выбрать перпендикулярными и имеющими единичную длину. Введем систему координат $\tilde{x}O\tilde{y}$ так, что

$$\bar{\mathbf{c}}_1 \uparrow\uparrow O\tilde{x}, \quad \bar{\mathbf{c}}_2 \uparrow\uparrow O\tilde{y}.$$

Тогда, как показали ранее, «старый» базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ и «новый» базис $\bar{\mathbf{c}}_1, \bar{\mathbf{c}}_2$ будут связаны равенствами

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{c}}_1 = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \sin \alpha \cdot \mathbf{j}, \\ \bar{\mathbf{c}}_2 = -\sin \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \alpha \cdot \mathbf{j}; \end{cases}$$

а координаты точки в системе координат xOy и $\tilde{x}O\tilde{y}$ удовлетворяют условию

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = \cos \alpha \cdot \tilde{x} - \sin \alpha \cdot \tilde{y} \\ y = \sin \alpha \cdot \tilde{x} + \cos \alpha \cdot \tilde{y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 &= \tilde{x}^2 (A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha) + \\ &+ \tilde{x} \cdot \tilde{y} (-2A \cos \alpha \sin \alpha + 2B \cos^2 \alpha - 2B \sin^2 \alpha + 2C \sin \alpha \cos \alpha) + \\ &+ \tilde{y}^2 (A \sin^2 \alpha - 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \cos^2 \alpha). \end{aligned}$$

Согласно критерию диагонализированности оператора, $\bar{\mathbf{c}}_1, \bar{\mathbf{c}}_2$ – собственные векторы оператора, относящиеся к λ_1 и λ_2 соответственно. Следовательно, $\varphi(\bar{\mathbf{c}}_1) = \lambda_1 \bar{\mathbf{c}}_1$ и $\varphi(\bar{\mathbf{c}}_2) = \lambda_2 \bar{\mathbf{c}}_2$,

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos \alpha \\ \lambda_1 \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 \sin \alpha \\ \lambda_2 \cos \alpha \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \cos \alpha + B \sin \alpha = \lambda_1 \cos \alpha, \\ B \cos \alpha + C \sin \alpha = \lambda_1 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -A \sin \alpha + B \cos \alpha = -\lambda_2 \sin \alpha, \\ -B \sin \alpha + C \cos \alpha = \lambda_2 \cos \alpha. \end{cases}$$

Но тогда

$$\begin{aligned} & A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha = \\ &= (A \cos^2 \alpha + B \cos \alpha \sin \alpha) + (B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha) = \\ &= \cos \alpha (A \cos \alpha + B \sin \alpha) + \sin \alpha (B \cos \alpha + C \sin \alpha) \\ &= \lambda_1 \cos^2 \alpha + \lambda_1 \sin^2 \alpha = \lambda_1 \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$-2A \cos \alpha \sin \alpha + 2B \cos^2 \alpha - 2B \sin^2 \alpha + 2C \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

и $A \sin^2 \alpha - 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \cos^2 \alpha = \lambda_2.$

Таким образом, в системе координат $\tilde{x}O\tilde{y}$ уравнение кривой будет иметь вид $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + F = 0$

и, следовательно, $\tilde{x}O\tilde{y}$ – искомая каноническая система координат кривой.

в) Рассмотрим общий случай, т.е. уравнение

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (1.27)$$

Очевидно, что каноническая система координат кривой (1.27) по отношению к исходной развернута на некоторый угол α и смещена в точку C_0 . При построении такой кривой, сначала находят α (точнее, направляющие векторы $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ новых осей координат), а затем точку C_0 .

ПРИМЕР. Построить кривую

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

РЕШЕНИЕ

1) Запишем матрицу $\mathbf{Q}$ и найдем ее собственные значения. Имеем:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} - \lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 5 \\ 5 & 3 - \lambda \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow |\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{E}| = 9 + \lambda^2 - 6\lambda - 25 = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0,$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 8, \lambda_2 = -2.$$

2) Найдем собственные подпространства $\mathcal{L}_{\lambda=8}$ и $\mathcal{L}_{\lambda=-2}$. Имеем:

$$\mathbf{Q} - 8\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{Q} - 8\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -5x_1 + 5x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2 \quad - \text{общее решение;}$$

(1; 1) – фундаментальная система решений.

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{f}}_1 = \{1; 1\} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \text{базис } \mathcal{L}_{\lambda=8}, \quad |\bar{\mathbf{f}}_1| = \sqrt{2},$$

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{c}}_1 = \frac{\bar{\mathbf{f}}_1}{|\bar{\mathbf{f}}_1|} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} - \text{базис } \mathcal{L}_{\lambda=8};$$

Так как векторы $\bar{\mathbf{c}}_1$ и $\bar{\mathbf{c}}_2$ – перпендикулярны, то можем положить

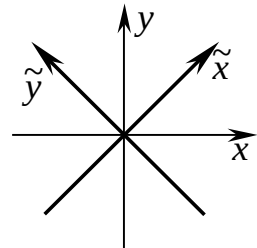
$$\bar{\mathbf{c}}_2 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} - \text{базис } \mathcal{L}_{\lambda=-2}.$$

Итак, направляющие векторы осей «развернутой» системы координат $\tilde{x}O\tilde{y}$:

$$\bar{\mathbf{c}}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{c}}_2 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{y}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{y}.$$



3) Найдем уравнение кривой в системе координат $\tilde{x}O\tilde{y}$:

$$8\tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y}\right) - 14\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y}\right) - 13 = 0,$$

$$8\tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}\tilde{x} - \frac{12}{\sqrt{2}}\tilde{y} - 13 = 0,$$

$$8\tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 - 8\sqrt{2}\tilde{x} - 6\sqrt{2}\tilde{y} - 13 = 0.$$

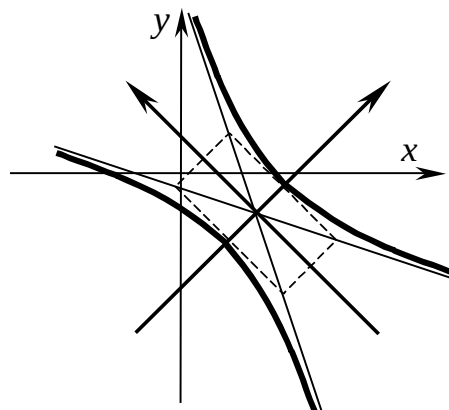
4) Определим центр гиперболы:

$$8(\tilde{x}^2 - \sqrt{2}\tilde{x}) - 2(\tilde{y}^2 + 3\sqrt{2}\tilde{y}) - 13 = 0,$$

$$8\left(\tilde{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(\tilde{y}^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{9}{2} - 13 = 0,$$

$$8\left(\tilde{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(\tilde{y}^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8 = 0,$$

$$\frac{\left(\tilde{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1} - \frac{\left(\tilde{y} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} = 1.$$



Следовательно, в системе координат

$\tilde{x}O\tilde{y}$ гипербола имеет центр в точке $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

5) Построим кривую, предварительно построив ее каноническую систему координат.

Замечание - По формуле $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

можно найти координаты точки C в системе координат xOy . В нашем примере получим $C(2; -1)$.

2 Аналитическая геометрия в пространстве

2.1 Плоскость в пространстве

Поверхностью называют геометрическое место точек $M(x; y; z)$, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ – многочлен степени n . Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называют **общим уравнением** поверхности, степень многочлена $F(x, y, z)$ называют **порядком поверхности**.

Плоскость является поверхностью первого порядка. Ее общее уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2.1)$$

где A, B, C, D – постоянные коэффициенты, причем A, B и C не обращаются в ноль одновременно. С геометрической точки зрения A, B и C – это координаты вектора, перпендикулярного плоскости.

Вектор, перпендикулярный плоскости, называют **нормальным вектором (нормалью)** этой плоскости.

2.1.1 Общее уравнение плоскости в пространстве

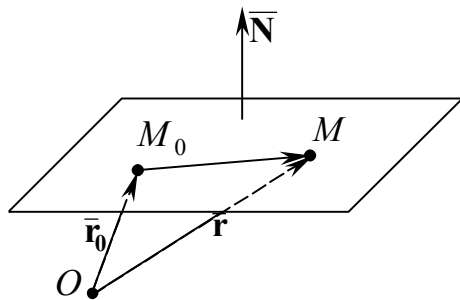
Получим общее уравнение плоскости, решив следующую задачу.

ЗАДАЧА 2.1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A, B, C\}$.

Замечание - Данные задачи определяют плоскость однозначно.

Пусть $M(x, y, z)$ – текущая точка плоскости.

Обозначим через $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ – радиус-векторы точек M_0 и M .



Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ и $\vec{N}$. По условию задачи они перпендикулярны. Следовательно,

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N}) = 0,$$

или, в координатной форме,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2.2)$$

Уравнению (2.2) удовлетворяют координаты любой точки плоскости и не удовлетворяют координаты других точек пространства. Следовательно, это и есть искомое уравнение.

Уравнение (2.2) называют *уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{N} = \{A, B, C\}$* .

Воспользуемся свойствами скалярного произведения и перепишем уравнение $(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{N}) = 0$ в виде:

$$(\bar{r}, \bar{N}) - (\bar{r}_0, \bar{N}) = 0.$$

Обозначим число $-(\bar{r}_0, \bar{N}) = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ через D . Тогда уравнение примет вид

$$(\bar{r}, \bar{N}) + D = 0,$$

а уравнение (2.2):

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) называют *общим уравнением плоскости*.

Таким образом, плоскость является поверхностью первого порядка. В общем случае она задается уравнением (2.1), где A, B, C, D – числа. Причем A, B и C не обращаются в ноль одновременно, так как с геометрической точки зрения это координаты вектора, перпендикулярного плоскости.

2.1.2 Исследование общего уравнения плоскости

Проведем *исследование общего уравнения плоскости*. То есть выясним, что можно сказать о плоскости по виду ее общего уравнения.

Если в уравнении (2.1) все коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля, то уравнение называют *полным*; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – уравнение называют *неполным*.

1) Пусть уравнение (2.1) – полное. Тогда его можно записать в виде

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz &= -D, \\ \Rightarrow \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} &= 1. \end{aligned}$$

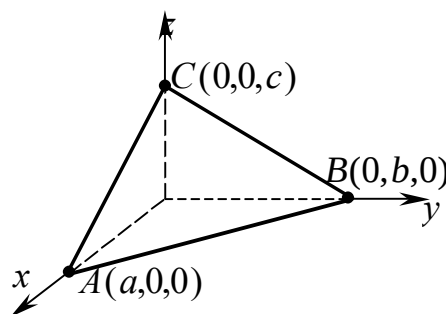
Обозначим $-D/A = a$, $-D/B = b$ и $-D/C = c$. Тогда уравнение плоскости примет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) называют *уравнением плоскости в отрезках*.

Легко проверить, что плоскость, имеющая уравнение (2.3), проходит через точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$.

Следовательно, с геометрической точки зрения, a , b и c – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях Ox , Oy и Oz соответственно. Поэтому уравнение плоскости в отрезках удобно использовать при построении плоскости.

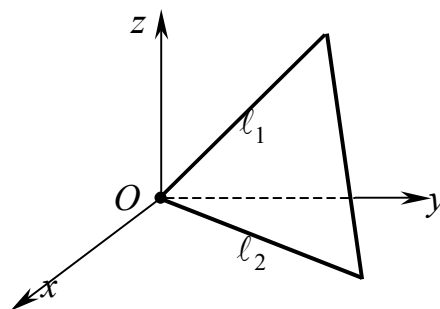


2) Пусть в уравнении (2.1) коэффициенты A , B и C – ненулевые, а $D = 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Очевидно, что такая плоскость проходит через начало координат $O(0; 0; 0)$.

Замечание - Чтобы построить плоскость $Ax + By + Cz = 0$, обычно находят прямые, по которым она пересекается с двумя координатными плоскостями. Например, ℓ_1 – пересечение с плоскостью Oyz (ее уравнение в плоскости Oyz : $By + Cz = 0$) и ℓ_2 – пересечение с плоскостью Oxy (ее уравнение в плоскости Oxy : $Ax + By = 0$).



3) Пусть в уравнении (2.1) один из коэффициентов A , B или C – нулевой, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид

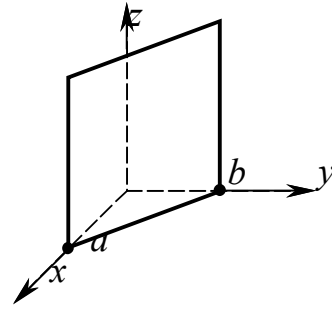
$$Ax + By + D = 0 \quad \text{или} \quad Ax + Cz + D = 0 \quad \text{или} \quad By + Cz + D = 0.$$

Если плоскость имеет уравнение $Ax + By + D = 0$, то его можно записать в виде

$$Ax + By = -D,$$

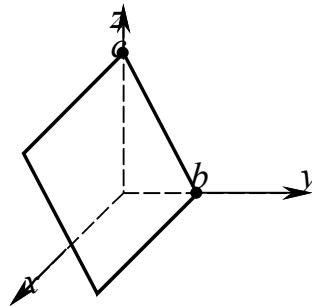
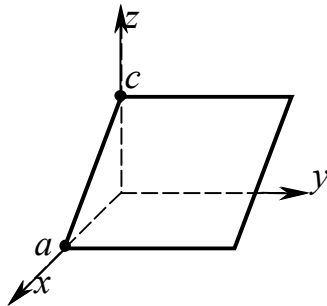
$$\Rightarrow \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} = 1,$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$



где $-D/A = a$, $-D/B = b$. Но последнему уравнению удовлетворяют координаты точек $M_1(a; 0; z)$ и $M_2(0; b; z)$ (при любом z). Следовательно, плоскость $Ax + By + D = 0$ параллельна оси Oz и отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b соответственно.

Аналогичным образом получаем, что плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси Oy и отсекает на осях Ox и Oz отрезки $a = -D/A$ и $c = -D/C$ соответственно, а плоскость $By + Cz + D = 0$ — параллельна оси Ox и отсекает на осях Oy и Oz отрезки $b = -D/B$ и $c = -D/C$.



Иначе говоря, плоскость, в уравнении которой отсутствует одна из координат, параллельна оси отсутствующей координаты.

4) Пусть в уравнении (2.1) два из трех коэффициентов A , B или C — нулевые, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax + D = 0 \quad \text{или} \quad By + D = 0 \quad \text{или} \quad Cz + D = 0.$$

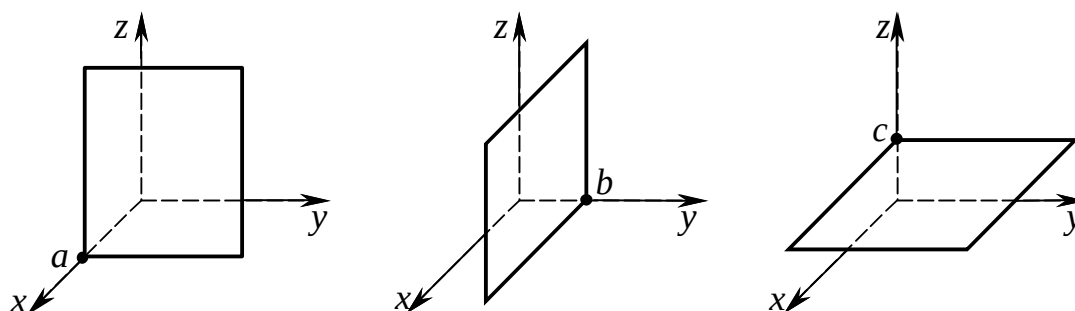
Если плоскость имеет уравнение $Ax + D = 0$, то его можно записать в виде

$$\Rightarrow \frac{x}{-D/A} = 1,$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = 1,$$

где $-D/A = a$. Но последнему уравнению удовлетворяют координаты точек $M(a; y; z)$ (при любых y и z). Следовательно, плоскость $Ax + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oyz и отсекает на оси Ox отрезок $a = -D/A$.

Аналогичным образом получаем, что плоскость $Bu + D = 0$ параллельна координатной плоскости Oxz и отсекает на оси Oy отрезок $b = -D/B$, а плоскость $Cz + D = 0$ – параллельна плоскости Oxy и отсекает на оси Oz отрезок $c = -D/C$.



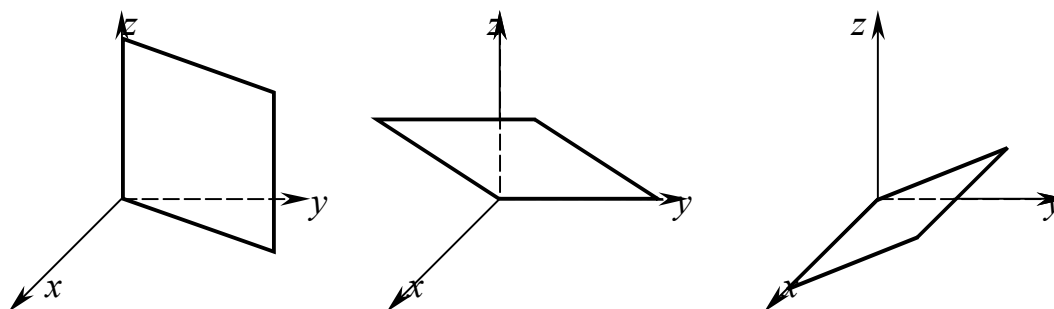
Иначе говоря, плоскость, в уравнении которой отсутствуют две координаты, параллельна координатной плоскости, проходящей через оси отсутствующих координат.

5) Пусть в уравнении (2.1) $D = 0$ и один из коэффициентов A , B или C тоже нулевой, т.е. уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax + Bu = 0 \quad \text{или} \quad Ax + Cz = 0 \quad \text{или} \quad Bu + Cz = 0.$$

Уравнению $Ax + Bu = 0$ удовлетворяют координаты точек $M(0; 0; z)$ (при любом z). Следовательно, эта плоскость проходит через ось Oz .

Аналогично получаем, что плоскость $Ax + Cz = 0$ проходит через ось Oy , а плоскость $Bu + Cz = 0$ – проходит через ось Ox .



6) Пусть в уравнении (2.1) три коэффициента равны нулю, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$Ax = 0 \quad \text{или} \quad By = 0 \quad \text{или} \quad Cz = 0.$$

Эти уравнения можно записать соответственно в виде

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Но это уравнения координатных плоскостей Oyz , Oxz , Oxy .

2.2 Другие формы записи уравнения плоскости

В аналитической геометрии плоскость обычно задают общим уравнением (2.1). Но условия задачи могут потребовать записать ее уравнение в другом виде. Два таких вида нам уже встретились (уравнения (2.2) и (2.3)). Рассмотрим, в каком еще виде можно записать уравнение плоскости.

2.2.1 Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам

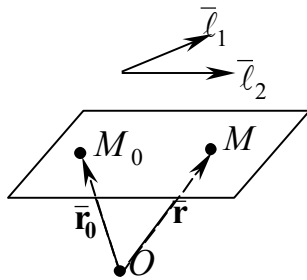
Решим следующую задачу.

ЗАДАЧА 2.2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно неколлинеарным векторам $\bar{\ell}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\bar{\ell}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$.

Замечание - Данные задачи определяют плоскость однозначно.

Пусть $M(x, y, z)$ – текущая точка плоскости.

Обозначим через $\bar{r}_0$ и $\bar{r}$ – радиус-векторы точек M_0 и M .



Рассмотрим векторы $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$, $\bar{\ell}_1$ и $\bar{\ell}_2$.

По условию задачи они компланарны. Следовательно, их смешанное произведение равно нулю:

$$(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2) = 0,$$

или, в координатной форме,

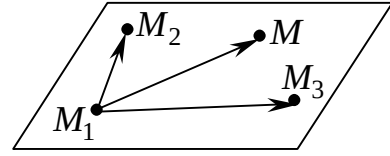
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) называют *уравнением плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам*.

2.2.2 Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой

Это уравнение является частным случаем уравнения (2.4).

Действительно, пусть плоскость проходит через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Тогда векторы



$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

$$\text{и } \overrightarrow{M_1 M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$$

неколлинеарные и параллельны плоскости. Следовательно, уравнение этой плоскости будет иметь вид

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0,$$

или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) называют *уравнениями плоскости, проходящей через три точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

2.3 Взаимное расположение плоскостей

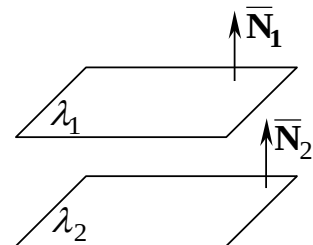
Если в пространстве даны две плоскости, то они либо параллельны, либо пересекаются. Выясним, как по уравнениям плоскостей определить их взаимное расположение.

Пусть уравнения плоскостей λ_1 и λ_2 имеют вид:

$$\lambda_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\lambda_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

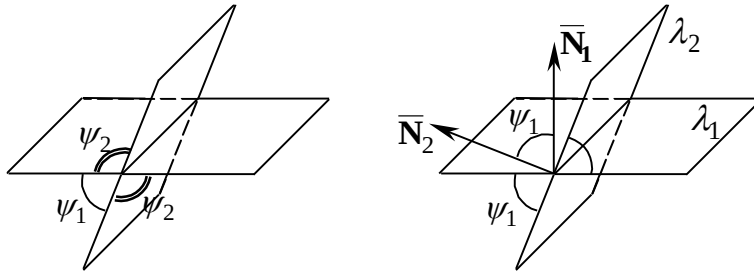
Если плоскости параллельны, то, очевидно, что их нормальные векторы $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ коллинеарны.



Так как коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты, то получаем, что *плоскости λ_1 и λ_2 параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих*

неизвестных пропорциональны, т.е. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$

Теперь рассмотрим пересекающиеся плоскости. При пересечении плоскостей в пространстве образуется две пары двугранных углов. Выясним, как найти их величину ψ_1 и ψ_2 .



Пусть плоскости заданы общими уравнениями:

$$\lambda_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

$\Rightarrow \bar{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\bar{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ – нормали к плоскостям.

Один из углов (ψ_1), образуемых плоскостями λ_1 и λ_2 , равен углу между их нормальными векторами $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$. Второй угол $\psi_2 = \pi - \psi_1$. Следовательно,

$$\cos \psi_1 = \frac{(\bar{N}_1, \bar{N}_2)}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}$$

и

$$\cos \psi_2 = -\cos \psi_1 = -\frac{(\bar{N}_1, \bar{N}_2)}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = -\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}.$$

Объединив эти две формулы получим, что, если плоскости λ_1 и λ_2 заданы общими уравнениями, то углы между ними можно найти по формуле

$$\cos \psi_{1,2} = \pm \frac{|\bar{N}_1, \bar{N}_2|}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \pm \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}, \quad (2.6)$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Частный случай пересекающихся плоскостей – перпендикулярные плоскости. Из формулы (2.6) легко получить критерий перпендикулярности плоскостей, заданных общими уравнениями. Действительно, если λ_1 и λ_2 перпендикулярны, то $\psi_1 = \psi_2 = 90^\circ$ и $\cos \psi_{1,2} = 0$.

Но тогда по формуле (2.6) имеем:

$$(\bar{N}_1, \bar{N}_2) = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad \text{– критерий перпендикулярности плоскостей, заданных общими уравнениями.}$$

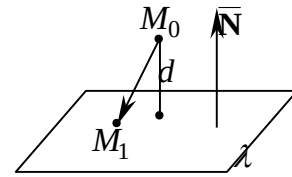
2.4 Расстояние от точки до плоскости

Заканчивая рассматривать плоскость в пространстве, решим следующую задачу.

ЗАДАЧА 2.3. Пусть плоскость λ задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, не принадлежащая этой плоскости. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости λ .

Эта задача может быть решена несколькими способами. Рассмотрим решение, основанное на знании формул векторной алгебры.

Пусть $\bar{N} = \{A, B, C\}$ – нормальный вектор плоскости λ , $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – любая точка на плоскости λ , d – расстояние от точки M_0 до λ . Тогда



$$d = \left| \text{Pr}_{\bar{N}} \overline{M_1 M_0} \right| = \left| \frac{(\bar{N}, \overline{M_1 M_0})}{|\bar{N}|} \right| = \frac{|(\bar{N}, \overline{M_1 M_0})|}{|\bar{N}|}.$$

Имеем: $\bar{N} = \{A, B, C\}$, $\overline{M_1 M_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$

$$\Rightarrow |\bar{N}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad (\bar{N}, \overline{M_1 M_0}) &= A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1). \end{aligned}$$

Так как $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка на плоскости λ , то ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости, т.е.

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

$$\Rightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D,$$

$$\Rightarrow (\bar{N}, \overline{M_1 M_0}) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D.$$

Следовательно,

$$d = \frac{|(\bar{N}, \overline{M_1 M_0})|}{|\bar{N}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (2.7)$$

Таким образом, если известно общее уравнение плоскости, то расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до этой плоскости может быть найдено по формуле (2.7).

2.5 Прямая в пространстве

2.5.1 Уравнения прямой в пространстве

Напомним, что в аналитической геометрии любая пространственная линия рассматривается как пересечение двух поверхностей.

Так как каждая прямая всегда может быть помещена в некоторую плоскость и при пересечении двух плоскостей образуется прямая, то в аналитической геометрии прямую в пространстве принято задавать как пересечение двух плоскостей.

Итак, пусть $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – уравнения любых двух различных плоскостей, содержащих прямую ℓ . Тогда координаты любой точки прямой ℓ удовлетворяют одновременно обоим уравнениям, т.е. являются решениями системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Систему (2.8) называют *общими уравнениями прямой в пространстве*. Так как через любую прямую в пространстве проходит множество плоскостей, то любую прямую можно задать ее общими уравнениями и не единственным образом.

Недостатком задания прямой общими уравнениями является то, что по их виду ничего нельзя сказать о расположении прямой в пространстве. При решении задач удобнее использовать другие, более наглядные формы записи уравнений прямой – параметрические или канонические уравнения.

Получим параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве, решив следующую задачу.

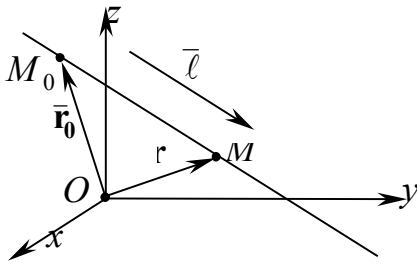
ЗАДАЧА 2.4. Записать уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно вектору $\vec{\ell} = \{m; n; p\}$.

Замечание - Данные задачи определяют прямую однозначно.

Также, как и для прямой на плоскости, вектор, параллельный прямой в пространстве, называют *направляющим вектором* этой прямой.

Пусть $M(x, y, z)$ – текущая точка прямой.

Обозначим через $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ – радиус-векторы точек M_0 и M .



Рассмотрим векторы $\overline{M_0M} = \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0$ и $\bar{\ell}$. По условию задачи они параллельны.

Следовательно, существует такое число t (t называют *параметром*), что

$$\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0 = t \bar{\ell}, \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_0 + t \bar{\ell},$$

или, в координатной форме,

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n, \\ z = z_0 + t \cdot p. \end{cases} \quad (2.9)$$

Систему уравнений (2.9) называют *параметрическими уравнениями прямой в пространстве*.

Если в задаче 2.4 вектор $\bar{\ell}$ не параллелен ни одной из координатных плоскостей (т.е. если $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $p \neq 0$), то из уравнений системы (2.9) можно выразить параметр t :

$$t = \frac{x - x_0}{m}, \quad t = \frac{y - y_0}{n}, \quad t = \frac{z - z_0}{p}$$

и заменить систему (2.9) одним равенством вида:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (2.10)$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты некоторой точки на прямой; m, n, p — координаты направляющего вектора прямой.

Уравнения (2.10) называют *каноническими уравнениями прямой в пространстве*.

Частным случаем канонических уравнений являются уравнения прямой, проходящей через две заданные точки.

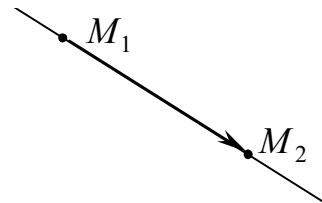
Действительно, пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда вектор

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

является ее направляющим вектором, и канонические уравнения этой прямой будут иметь вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (2.11)$$

Уравнения (2.11) называют *уравнениями прямой, проходящей через две заданные точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.



2.5.2 Переход от общих уравнений прямой к каноническим

Переход от канонических (параметрических) уравнений прямой к общим не вызывает затруднений. Действительно, если канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

то ее параметрические уравнения:

$$t = \frac{x - x_0}{m}, \quad t = \frac{y - y_0}{n}, \quad t = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n, \\ z = z_0 + t \cdot p; \end{cases}$$

а общие уравнения:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \end{cases}$$

Переход от общих уравнений прямой к каноническим (параметрическим) требует несколько больших усилий.

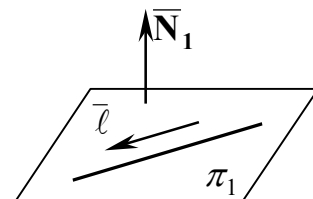
Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Чтобы записать канонические (параметрические) уравнения этой прямой, необходимо найти ее направляющий вектор $\bar{\ell}$ и координаты какой-нибудь точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой. Координаты точки M_0 найти легко – это одно из решений системы уравнений (2.8). Выясним, как можно найти направляющий вектор $\bar{\ell}$.

Пусть π_1 и π_2 – плоскости, уравнения которых входят в общие уравнения прямой, $\bar{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\bar{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ – нормальные векторы к плоскостям π_1 и π_2 соответственно.

Так как прямая ℓ лежит в плоскости π_1 , то векторы $\bar{N}_1$ и $\bar{\ell}$ перпендикулярны.



Так как прямая ℓ лежит в плоскости π_2 , то векторы $\bar{\mathbf{N}}_2$ и $\bar{\ell}$ тоже перпендикулярны.

Следовательно, в качестве $\bar{\ell}$ можем взять векторное произведение векторов $\bar{\mathbf{N}}_1$ и $\bar{\mathbf{N}}_2$.

ПРИМЕР. Записать канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7 = 0, \\ x + 3y - 4z - 1 = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. 1) Найдем одно из решений данной системы. Так как $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, то этот минор можно выбрать в качестве базисного минора матрицы системы. Следовательно, переменные x и y можем выбрать в качестве базисных, а переменную z – свободной. Так как нам не нужно все множество решений системы, то придадим переменной z конкретное значение. Например, полагаем $z = 0$. Тогда переменные x и y будут удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0, \\ x + 3y - 1 = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему по формулам Крамера и получаем:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9, \quad D_1 = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -18, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 9;$$

$$\Rightarrow x = \frac{D_1}{D} = \frac{-18}{9} = -2, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{9}{9} = 1.$$

Таким образом, $(-2; 1; 0)$ – одно из решений данной системы, и точка $M_0(-2; 1; 0)$ – точка на рассматриваемой прямой.

2) Найдем направляющий вектор $\bar{\ell}$ прямой. Имеем:

$$\bar{\mathbf{N}}_1 = \{2; -3; 5\}, \quad \bar{\mathbf{N}}_2 = \{1; 3; -4\};$$

$$\Rightarrow [\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 9\mathbf{k}.$$

Следовательно, в качестве направляющего вектора прямой можем взять вектор $\bar{\ell} = \{-3; 13; 9\}$, и канонические уравнения рассматриваемой прямой будут иметь вид:

$$\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{13} = \frac{z}{9}.$$

2.6 Взаимное расположение прямых в пространстве

Если в пространстве даны две прямые, то они могут 1) быть параллельными, 2) пересекаться, 3) скрещиваться.

Выясним, как по уравнениям прямых определить их взаимное расположение.

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы каноническими уравнениями:

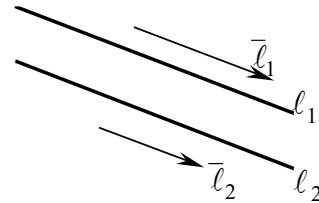
$$\ell_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad \ell_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Если прямые параллельны, то их направляющие векторы

$$\bar{\ell}_1 = \{m_1; n_1; p_1\} \quad \text{и} \quad \bar{\ell}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$$

коллинеарны. Так как коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты, то *условие параллельности прямых будет иметь вид:*

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (2.12)$$

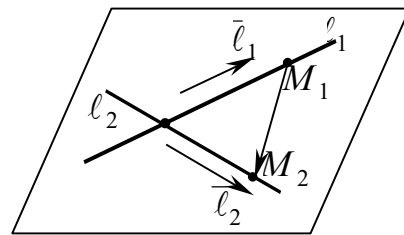


Теперь рассмотрим две пересекающиеся прямые. Такие прямые можно поместить в одну плоскость. Но это значит, что векторы $\bar{\ell}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$, $\bar{\ell}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ и $\overline{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ будут компланарны. Следовательно,

$$(\overline{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2}, \bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2) = 0,$$

или, в координатной форме,

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.13)$$



Таким образом, *если прямые ℓ_1 и ℓ_2 не параллельны и для них выполняется условие (2.13), то они пересекаются.*

Так как скрещивающиеся прямые нельзя поместить в одну плоскость, то для скрещивающихся прямых условие (2.13) не выполняется. Следовательно, если прямые ℓ_1 и ℓ_2 не параллельны и для них не выполняется условие (2.13), то они скрещиваются.

НАПРИМЕР. Прямые

$$\ell_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{3} \quad \text{и} \quad \ell_2: \frac{x}{6} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-2}{9}$$

будут параллельны, так как их направляющие векторы $\bar{\ell}_1 = \{2; 4; 3\}$ и $\bar{\ell}_2 = \{6; 12; 9\}$ удовлетворяют условию (2.12):

$$\frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{3}{9}.$$

Прямые

$$\ell_3: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3} \quad \text{и} \quad \ell_4: \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{-1}$$

не являются параллельными (их направляющие векторы не коллинеарны) и для них выполняется условие (2.13):

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 5-3 & 2-(-1) \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Следовательно, прямые ℓ_3 и ℓ_4 — пересекаются.

И, наконец, рассмотрим прямые

$$\ell_5: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \ell_6: \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{-1}.$$

Они не являются параллельными (их направляющие векторы не коллинеарны) и для них не выполняется условие (2.13):

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 5-3 & 2-0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Следовательно, прямые ℓ_5 и ℓ_6 — скрещиваются.

2.7 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы плоскость π и прямая ℓ . Они могут быть 1) параллельны;

2) прямая может лежать в плоскости;

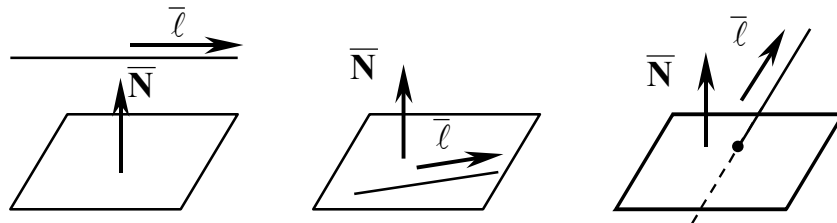
3) прямая и плоскость могут пересекаться в одной точке.

Выясним, как зная уравнения плоскости и прямой, определить их взаимное расположение.

Пусть $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ и $\ell: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

Тогда $\bar{N} = \{A, B, C\}$ – нормальный вектор плоскости,

$\bar{\ell} = \{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой.



Если плоскость и прямая параллельны или прямая ℓ целиком лежит в плоскости π , то векторы $\bar{N}$ и $\bar{\ell}$ – перпендикулярны. Следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$$(\bar{N}, \bar{\ell}) = 0,$$

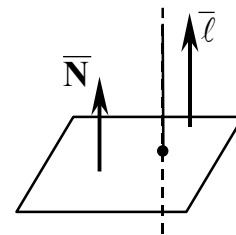
или в координатной форме

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (2.14)$$

Если условие (2.14) не выполняется, то геометрически это означает, что прямая и плоскость пересекаются в одной точке.

Частным случаем пересечения прямой и плоскости в одной точке является перпендикулярность прямой и плоскости. В этом случае $\bar{N}$ и $\bar{\ell}$ будут параллельны, что аналитически означает справедливость равенства

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$



Теперь укажем условие, которое позволит различать случай параллельности прямой и плоскости и случай, когда прямая принадлежит плоскости. Пусть прямая ℓ лежит в плоскости π . Тогда любая точка прямой

лежит в плоскости и, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости. В частности, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – некоторая фиксированная точка прямой ℓ . Если же прямая параллельна плоскости, то она не имеет общих точек с плоскостью и, следовательно, для такой прямой

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

Таким образом, *если прямая лежит в плоскости*, то должны выполняться два условия:

$$(\bar{N}, \bar{\ell}) = 0 \quad \text{и} \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0;$$

если же прямая параллельна плоскости, то

$$(\bar{N}, \bar{\ell}) = 0, \quad \text{но} \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0,$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – некоторая фиксированная точка прямой ℓ .

В заключение этого пункта вернемся к случаю, когда прямая и плоскость пересекаются в одной точке, и получим формулу для нахождения угла между прямой и плоскостью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Углом между прямой ℓ и плоскостью π называется угол φ между прямой ℓ и ее проекцией на плоскость π .

Из определения следует, что угол между прямой и плоскостью не превышает 90° , т.е. угол острый.

Пусть φ – угол между прямой ℓ и плоскостью π , M_0 – их точка пересечения.

Через M_0 перпендикулярно плоскости π проведем прямую ℓ_1 . Для ℓ_1 вектор $\bar{N}$ является направляющим и, следовательно, острый угол ψ между прямыми ℓ и ℓ_1 может быть найден по формуле

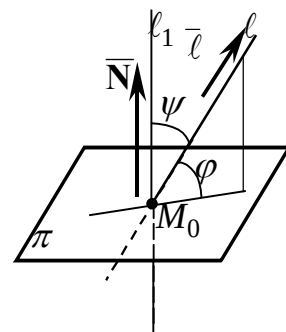
$$\cos \psi = \frac{|(\bar{N}, \bar{\ell})|}{|\bar{N}| \cdot |\bar{\ell}|}.$$

Но

$$\psi = 90^\circ - \varphi,$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \cos \psi = \frac{|(\bar{N}, \bar{\ell})|}{|\bar{N}| \cdot |\bar{\ell}|} \quad \text{– формула для определе-}$$

ния угла между прямой ℓ и плоскостью π .



2.8 Поверхности 2-го порядка

Напомним, что поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек в пространстве, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – многочлен степени 2.

Следовательно, в общем случае уравнение поверхности второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0.$$

Поверхности второго порядка делятся на две группы: 1) вырожденные и 2) невырожденные.

Вырожденные поверхности второго порядка это точки и плоскости, которые заданы уравнениями второго порядка. Например,

а) уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ задает точку $O(0; 0; 0)$;

б) уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$ задает плоскость $x + y + z - 1 = 0$. Действительно,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y - 2z + 1 = (x + y + z - 1)^2,$$

$$\Rightarrow (x + y + z - 1)^2 = 0,$$

$$\Rightarrow x + y + z - 1 = 0.$$

в) уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 1 = 0$ определяет пару параллельных плоскостей. Действительно,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 1 = (x + y + z - 1)(x + y + z + 1),$$

$$\Rightarrow (x + y + z - 1)(x + y + z + 1) = 0,$$

$$\Rightarrow x + y + z - 1 = 0 \text{ или } x + y + z + 1 = 0.$$

Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка пространства, то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную поверхность (мнимую поверхность второго порядка).

Свои названия поверхности второго порядка получили, в большинстве случаев, от названия кривых, которые получаются при их пересечении плоскостями.

Также как и для кривых второго порядка, наиболее простое уравнение поверхность второго порядка будет иметь в декартовой системе координат,

которая привязана к осям симметрии поверхности. Такие системы координат называют каноническими системами координат поверхности. В зависимости от вида уравнения в канонической системе координат, невырожденные поверхности второго порядка разделяют на пять типов. Рассмотрим эти типы.

2.8.1 Эллипсоид

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Эллипсоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2.15)$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой эллипсоид имеет уравнение (2.15) называется его **канонической системой координат**, а уравнение (2.15) – **каноническим уравнением эллипсоида**.

Исследование канонического уравнения эллипсоида позволяет сделать вывод, что он имеет центр симметрии $O(0; 0; 0)$ и три плоскости симметрии xOy , xOz , yOz .

Действительно, если $M(x; y; z)$ – точка эллипсоида, то кроме равенства (2.15) будут справедливы также равенства

$$\begin{aligned} \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} + \frac{(-z)^2}{c^2} &= 1, & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(-z)^2}{c^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1, & \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1. \end{aligned}$$

Следовательно, на эллипсоиде лежат точки $M_1(-x; -y; -z)$, $M_2(x; y; -z)$, $M_3(x; -y; z)$, $M_4(-x; y; z)$, которые симметричны точке $M(x; y; z)$ относительно начала координат и координатных плоскостей xOy , xOz , yOz соответственно.

Для дальнейшего определения формы эллипсоида изучим его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

а) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении эллипсоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \quad (A_1)$$

Уравнение (A_1) определяет

- 1) эллипс при $|h| < a$ (причем, чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);
- 2) точку $A_{1,2}(\mp a; 0; 0)$ при $h = \pm a$;
- 3) мнимую кривую при $|h| > a$.

б) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении эллипсоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2} \quad (A_2)$$

Уравнение (A_2) определяет

- 1) эллипс при $|h| < b$ (причем, чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);
- 2) точку $B_{1,2}(0; \mp b; 0)$ при $h = \pm b$;
- 3) мнимую кривую при $|h| > b$.

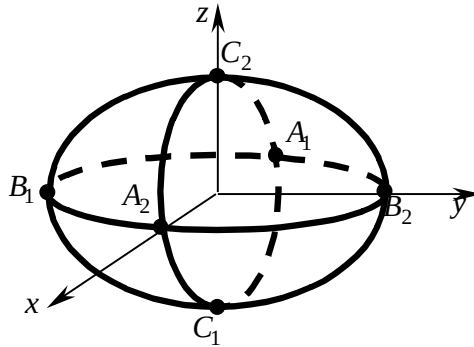
в) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении эллипсоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \quad (A_3)$$

Уравнение (A_3) определяет

- 1) эллипс при $|h| < c$ (причем, чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);
- 2) точку $C_{1,2}(0; 0; \mp c)$ при $h = \mp c$;
- 3) мнимую кривую при $|h| > c$.

На основании полученных данных построим эллипсоид:



Величины a , b и c называются **полуосями** эллипсоида. Если все они различны, то эллипсоид называется **трехосным**. В случае, когда две из трех полуосей равны, эллипсоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения эллипса вокруг одной из своих осей. Например, если $a = b$, то эллипсоид получится в результате вращения лежащего в плоскости yOz эллипса $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг его оси Oz . При этом, если $a = b < c$, то эллипсоид называется **вытянутым**, а при $a = b > c$ – **сжатым**.

Эллипсоид, у которого все три полуоси равны, называют **сферой**. Каноническое уравнение сферы принято записывать в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

где r – величина полуосей, которая называется **радиусом сферы**. С геометрической точки зрения, **сфера** – геометрическое место точек пространства, равноудаленных (на расстояние r) от некоторой фиксированной точки (называемой **центром**). В канонической системе координат сферы, центр – начало координат.

2.8.2 Гиперboloиды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Однополостным гиперboloидом** называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2.16)$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой однополостный гиперболоид имеет уравнение (2.16) называется его *канонической системой координат*, а уравнение (2.16) – *каноническим уравнением однополостного гиперболоида*.

Исследование канонического уравнения однополостного гиперболоида позволяет сделать вывод, что он имеет центр симметрии $O(0; 0; 0)$ и три плоскости симметрии xOy , xOz , yOz .

Для дальнейшего определения формы однополостного гиперболоида изучим его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

а) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении однополостного гиперболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \quad (B_1)$$

Уравнение (B_1) определяет

- 1) гиперболу, действительная ось которой параллельно оси Oy при $|h| < a$;
- 2) гиперболу, действительная ось которой параллельно оси Oz при $|h| > a$;
- 3) пару прямых при $h = \pm a$.

б) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении однополостного гиперболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2} \quad (B_2)$$

Уравнение (B_2) определяет

- 1) гиперболу, действительная ось которой параллельно оси Ox при $|h| < b$;
- 2) гиперболу, действительная ось которой параллельно оси Oz при $|h| > b$;
- 3) пару прямых при $h = \pm b$.

в) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении однополостного гиперболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \quad (B_3)$$

Уравнение (B_3) определяет эллипс при любом h . При $h = 0$ полуоси эллипса будут наименьшими. Этот эллипс называют **горловым эллипсом** однополостного гиперболоида.

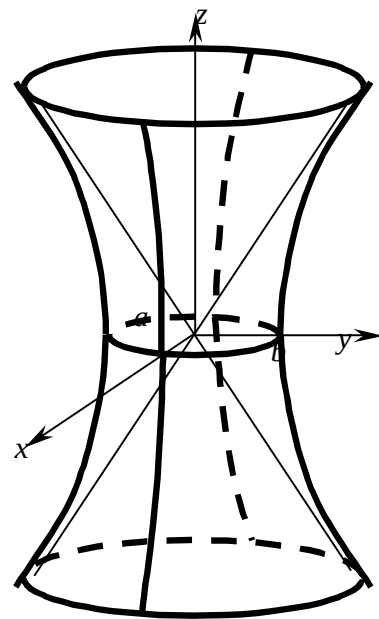
На основании полученных данных построим поверхность.

Величины a , b и c называются **полуосями** гиперболоида. В случае, когда $a = b$, однополостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения гиперболы $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг своей мнимой оси. В этом случае, в сечении поверхности плоскостями $z = h$ будут окружности.

Замечание - Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

тоже определяют однополостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Двуполостным гиперболоидом** называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (2.17)$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой однополостный гиперболоид имеет уравнение (2.17) называется его **канонической системой координат**, а уравнение (2.17) – **каноническим уравнением двуполостного гиперболоида**.

Исследование канонического уравнения двуполостного гиперboloида позволяет сделать вывод, что он имеет центр симметрии $O(0; 0; 0)$ и три плоскости симметрии xOy , xOz , yOz .

Для дальнейшего определения формы двуполостного гиперboloида изучим его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

- а) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении двуполостного гиперboloида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{a^2} \quad (C_1)$$

Уравнение (C_1) при любом h определяет гиперболу, действительная ось которой параллельно оси Oz .

- б) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении двуполостного гиперboloида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{b^2} \quad (C_2)$$

Уравнение (C_2) при любом h определяет гиперболу, действительная ось которой параллельно оси Oz .

- в) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении двуполостного гиперboloида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

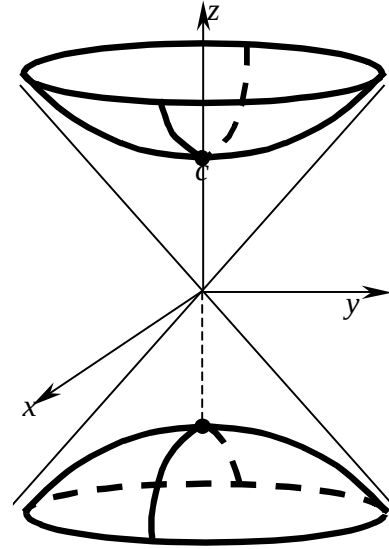
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{h^2}{c^2} \quad (C_3)$$

Уравнение (C_3) определяет

- 1) эллипс при $|h| > c$ (причем, чем больше $|h|$, тем больше полуоси эллипса);
- 2) точку $C_{1,2}(0; 0; \mp c)$ при $h = \mp c$;
- 3) мнимую кривую при $|h| < c$.

На основании полученных данных построим поверхность.

Величины a , b и c называются **полу-осями** двуполостного гиперболоида. В случае, когда $a = b$, двуполостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения гиперболы $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ вокруг своей мнимой оси. В этом случае, в сечении поверхности плоскостями $z = h$ будут окружности.



Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

тоже определяют двуполостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

2.8.3 Конус

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Конусом** называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (2.18)$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой конус имеет уравнение (2.18) называется его **канонической системой координат**, а уравнение (2.18) – **каноническим уравнением конуса**.

Исследование канонического уравнения конуса позволяет сделать вывод, что он имеет центр симметрии $O(0; 0; 0)$ и три плоскости симметрии xOy , xOz , yOz .

Для дальнейшего определения формы конуса изучим его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

- а) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении конуса этой плоскостью, удовлетворяют уравнению
- $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{a^2} \quad (D_1)$$

Уравнение (D_1) определяет

- 1) гиперболу, действительная ось которой параллельно оси Oz при $|h| \neq 0$;
- 2) пару прямых при $h = 0$.

- б) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении конуса этой плоскостью, удовлетворяют уравнению
- $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2} \quad (D_2)$$

Уравнение (D_2) определяет

- 1) гиперболу, действительная ось которой параллельно оси Oz при $|h| \neq 0$;
- 2) пару прямых при $h = 0$.

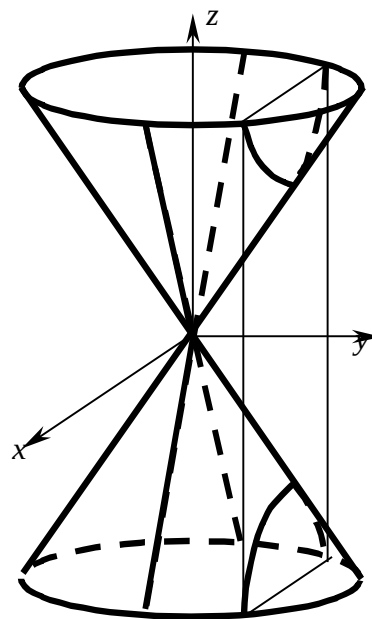
- в) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении конуса этой плоскостью, удовлетворяют уравнению
- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} \quad (D_3)$$

Уравнение (D_3) определяет

- 1) эллипс при $|h| \neq 0$ (причем, чем больше $|h|$, тем больше полуоси эллипса);
- 2) точку $O(0; 0; 0)$ при $h = 0$.

На основании полученных данных построим поверхность.

Величины a , b и c называются **полу-осями** конуса. Центр симметрии $O(0; 0; 0)$ называется **вершиной** конуса. В случае, когда $a = b$, конус является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения прямой $z = \frac{c}{b} y$ (ее называют **образующей** конуса) вокруг оси Oz . В этом случае, в сечении поверхности плоскостями $z = h$ будут окружности.



Замечание - Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

тоже определяют конусы, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

2.8.4 Параболоиды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Эллиптическим параболоидом* называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad (2.19)$$

где a, b – положительные константы.

Система координат, в которой эллиптический параболоид имеет уравнение (2.19) называется его **канонической системой координат**, а уравнение (2.19) – **каноническим уравнением эллиптического параболоида**.

Исследование канонического уравнения эллиптического параболоида позволяет сделать вывод, что он имеет две плоскости симметрии xOz и yOz .

Для дальнейшего определения формы эллиптического параболоида изучим его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

а) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении эллиптического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2} \quad (E_1)$$

При любом h оно определяет параболу, ось которой параллельна оси Oz , параметр $p = b^2$, ветви направлены вверх. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

- б) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении эллиптического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} = 2z - \frac{h^2}{b^2} \quad (E_2)$$

При любом h оно определяет параболу, ось которой параллельна оси Oz , параметр $p = a^2$, ветви направлены вверх. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

- в) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении эллиптического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h \quad (E_3)$$

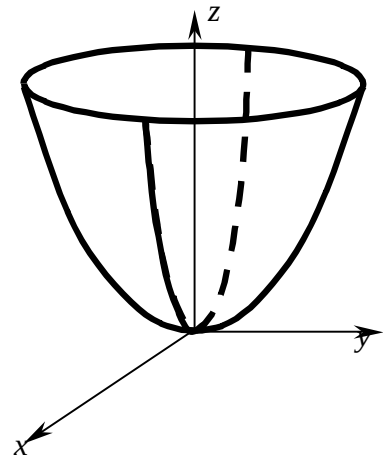
Уравнение (E_3) определяет

- 1) эллипс при $h > 0$ (причем, чем больше h , тем больше полуоси эллипса);
- 2) точку $O(0; 0; 0)$ при $h = 0$;
- 3) мнимую кривую при $h < 0$.

На основании полученных данных построим поверхность.

Величины a и b называются **параметрами** параболоида. Точка $O(0; 0; 0)$ называется **вершиной** эллиптического параболоида.

В случае, когда $a = b$, эллиптический параболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения параболы $y^2 = 2b^2z$ вокруг оси Oz . В этом случае, в сечении поверхности плоскостями $z = h$ будут окружности.



Замечания -

1) Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -2z$ тоже определяет эллиптический параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 2y$ и $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 2x$ определяют эллиптические параболоиды, но с осями симметрии Oy и Ox соответственно.

3) Все параболы, которые получаются в сечении плоскостью $x = h$, имеют один параметр. Следовательно, их можно получить одну из другой в результате параллельного переноса. Поэтому *эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в одну сторону).* **ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гиперболическим параболоидом** называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad (2.20)$$

где a, b – положительные константы.

Система координат, в которой эллиптический параболоид имеет уравнение (2.20) называется его **канонической системой координат**, а

уравнение (2.20) – *каноническим уравнением гиперболического параболоида*.

Исследование канонического уравнения гиперболического параболоида позволяет сделать вывод, что он имеет две плоскости симметрии xOz и yOz .

Для дальнейшего определения формы гиперболического параболоида изучим его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

а) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении гиперболического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$-\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2} \quad (F_1)$$

При любом h оно определяет параболу, ось которой параллельна оси Oz , параметр $p = b^2$, ветви направлены вниз. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

б) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении гиперболического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} = 2z + \frac{h^2}{b^2} \quad (F_2)$$

При любом h оно определяет параболу, ось которой параллельна оси Oz , параметр $p = a^2$, ветви направлены вверх. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вниз.

в) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении гиперболического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h \quad (F_3)$$

Уравнение (F_3) определяет

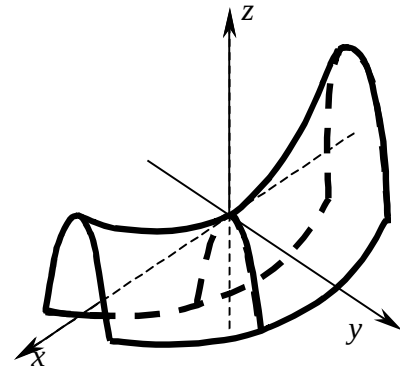
- 1) гиперболу при $h \neq 0$ (при $h > 0$ действительная ось гиперболы параллельна оси Ox , при $h < 0$ – оси Oy);
- 2) пару прямых при $h = 0$.

На основании полученных данных построим поверхность.

Величины a и b называются **параметрами** параболоида.

Замечания -

- 1) Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2z$ тоже определяет эллиптический параболоид, но «развернутый» по оси Oz вниз.



- 2) Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2y \quad \text{и} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2x$$

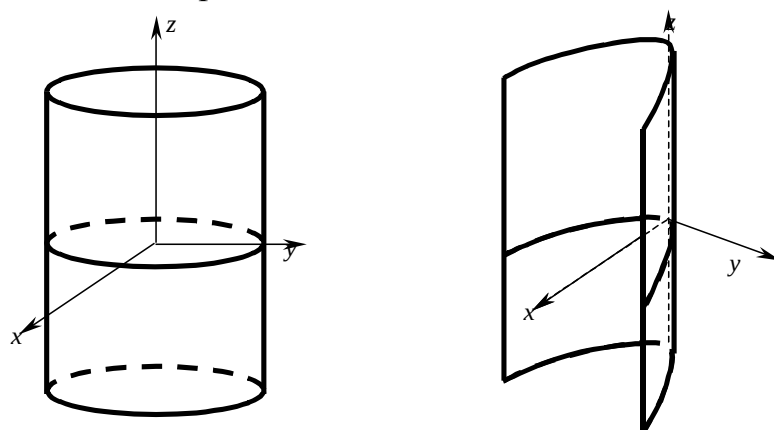
определяют эллиптические параболоиды, но с осями симметрии Oy и Ox соответственно.

- 3) Все параболы, которые получаются в сечении плоскостью $x = h$, имеют один параметр. Следовательно, их можно получить одну из другой в результате параллельного переноса. Поэтому эллиптический параболоид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ можно рассматривать как поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви подвижной параболы направлены вниз, неподвижной – вверх).

2.8.5 Цилиндры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Цилиндрической поверхностью (цилиндром) называется поверхность, которую описывает прямая (называемая **образующей**), перемещающаяся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой (называемой **направляющей**).*

Цилиндры называют по виду направляющей: *круговые, эллиптические, параболические, гиперболические*



Пусть направляющая цилиндра лежит в плоскости xOy и имеет уравнение $F(x, y) = 0$, а образующая параллельна оси Oz . Заметим, что если точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит направляющей, то $M(x_0; y_0; z)$ – принадлежит цилиндру при любом z . Следовательно, координаты точек цилиндра будут удовлетворять уравнению $F(x, y) = 0$.

Аналогично, если поместим направляющую в плоскость xOz (yOz) и возьмем образующую параллельно оси Oy (Ox), то уравнение цилиндра будет иметь вид $F(x, z) = 0$ ($F(y, z) = 0$), где $F(x, z) = 0$ ($F(y, z) = 0$) – уравнение направляющей в координатной плоскости.

Таким образом, получили, что *цилиндр в некоторой декартовой системе координат задается уравнением, в которое не входит одна из координат. Кривая, которую определяет это уравнение в соответствующей координатной плоскости, является направляющей цилиндра; а образующая – параллельна оси отсутствующей координаты.*

Рекомендуемая литература

- 1) Апатенок Р.Ф. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии/ Р.Ф. Апатенок [и др.] – Минск: Высшая школа, 1986. – 402 с.
- 2) Бугров Я.С. Высшая математика: учебник для академического бакалавриата: в 3 томах / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — Москва: Юрайт, 2016.
- 3) Владимирский Б.М. Математика. Общий курс: учебник / Б. М. Владимирский, А. Б. Горстко, Я. М. Ерусалимский. — СПб.: Лань, 2008.— 957 с.
- 4) Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах/ П. Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 2005. – 415с.
- 5) Терехина Л.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие/ Л.И. Терехина. – Томск: Аудит-Информ, 1998. – 216 с.
- 6) Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-Пресс, 2014. — 602 с.

Учебное электронное издание

Инна Леонтьевна Фаустова
Елена Григорьевна Пахомова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Научный редактор:

Редактор: М. В. Ворожейкина

Выходит в авторской редакции