

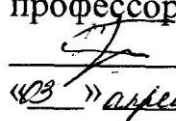
И.Л. Фаустова,
Е.Г. Пахомова



ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Северск, 2024

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Северский технологический институт –
филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(СТИ НИЯУ МИФИ)

Утверждаю
Зав. кафедрой ВМиИТ
профессор
 В. Н. Брендаков
«03» апреля 2024 г.

И.Л. Фаустова, Е.Г. Пахомова

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Учебное пособие
по курсу «Математика»
для студентов, обучающихся по направлению подготовки специалитет
14.05.04 "Электроника и автоматика физических установок»

Северск 2024

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161.5я73
Ф 517

Авторы:

Фаустова И. Л. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика и информационные технологии» СТИ НИЯУ МИФИ;
Пахомова Е. Г. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Компьютерная безопасность» ИПМКН ТГУ;

Рецензенты:

Брендаков В.Н. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика и информационные технологии» СТИ НИЯУ МИФИ

Фаустова И.Л., Пахомова Е.Г.

Ф 517 Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / И. Л. Фаустова, Е. Г. Пахомова; Северский технологический институт НИЯУ МИФИ – Северск: Издательство СТИ НИЯУ МИФИ, 2024. – Текст: электронный. – 58 с.

Данное учебное пособие содержит лекции по теории функций комплексного переменного по курсу «Математика» для 4 семестра. Учебное пособие нацелено на оказание помощи студентам при выполнении ими контрольных работ и подготовки к экзамену по математике. Материал данного пособия позволяет выработать теоретические и практические навыки по курсу «Математика», рассматриваемого в 4 семестре.

Учебное пособие предназначено для студентов второго курса СТИ НИЯУ МИФИ очной формы обучения по направлению подготовки 14.05.04 "Электроника и автоматика физических установок".

Одобрено на заседании кафедры высшей математики и информационных технологий СТИ НИЯУ МИФИ и рекомендовано к изданию (протокол № 2 от «03» апреля 2024 г.).

Рег. № 3/24 от 03.04.2024 г.

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ, Северский технологический институт- филиал ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (СТИ НИЯУ МИФИ), 2024

Содержание

1	Функции комплексного переменного	4
1.1	Комплексные числа и действия над ними.....	4
1.2	Последовательности комплексных чисел	8
1.2.1	Определения и основные утверждения.....	8
1.2.2	Неалгебраические операции с комплексными числами.....	11
1.2.3	Бесконечно большие последовательности комплексных чисел	13
1.3	Функция комплексного переменного.....	15
1.3.1	Основные определения	15
1.3.2	Элементарные функции комплексного переменного.....	16
1.4	Предел и непрерывность функции комплексного переменного....	19
1.5	Дифференцирование функции комплексного переменного	21
1.5.1	Производная функции комплексного переменного	21
1.5.2	Аналитические функции	23
1.6	Интегрирование функций комплексного переменного.....	26
1.6.1	Интеграл от функции комплексного переменного	26
1.6.2	Интегрирование аналитических функций комплексного переменного.....	30
1.6.3	Первообразная аналитической функции. Неопределенный интеграл.....	31
1.6.4	Интегральная формула Коши	33
2	Комплексные ряды и вычеты	34
2.1	Ряды в комплексной плоскости	34
2.1.1	Числовые ряды	34
2.1.2	Функциональные ряды	37
2.1.3	Степенные ряды.....	40
2.1.4	Разложение фкп в степенной ряд	41
2.1.5	Ряды Лорана.....	42
2.2	Особые точки	44
2.2.1	Изолированные особые точки	44
2.2.2	Характер точки ∞	47
2.3	Вычеты. Основная теорема о вычетах	48
2.3.1	Вычет относительно конечной точки.....	48
2.3.2	Вычет относительно ∞	50
2.3.3	Основная теорема о вычетах.....	50
2.4	Применение вычетов при вычислении интегралов	51
	Рекомендуемая литература	57

1 Функции комплексного переменного

1.1 Комплексные числа и действия над ними

Выражение вида $x + iy$ (где $x, y \in \mathbb{R}$) называется **комплексным числом** (в алгебраической форме). Множество комплексных чисел обозначают: $\{z = x + iy \mid \forall x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$.

Называют: x – **действительная часть** z (обозначают: $\operatorname{Re} z$);

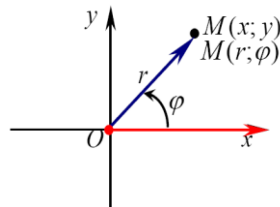
y – **мнимая часть** z (обозначают: $\operatorname{Im} z$).

Если $x = 0$, то комплексное число называют **чисто мнимым**.

Если $y = 0$, то $z = x$ – действительное число.

$\Rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (говорят: *множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел*).

Пусть на комплексной плоскости введена полярная система координат



Тогда $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

$\Rightarrow z = x + iy = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ – тригонометрическая форма записи комплексного числа.

НАЗЫВАЮТ: r – **модуль комплексного числа** z ,

φ – **аргумент комплексного числа** z .

ОБОЗНАЧАЮТ:

$|z|$ – модуль комплексного числа z ;

$\operatorname{arg} z$ – главное значение аргумента (т.е. $\varphi \in [0; 2\pi)$ или $\varphi \in (-\pi; \pi]$);

$\operatorname{Arg} z$ – все значения аргумента (т.е. $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arg} z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$).

Всякое комплексное число можно представить в виде

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Представление комплексного числа в виде $z = r \cdot e^{i\varphi}$ (где r – модуль комплексного числа, φ – аргумент комплексного числа), называется **показательной формой записи** комплексного числа.

Формулу

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

называют **формулой Эйлера**.

Основные операции над комплексными числами в алгебраической форме:

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

а) сложение (вычитание):

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

б) умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

Частный случай – возведение в степень n ($n \in \mathbb{N}$):

$$z^n = (x + iy)^n = (x + iy) \cdot (x + iy) \cdot \dots \cdot (x + iy)$$

в) деление:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

т.е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2},$$

где $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$ – комплексно сопряженное к z_2 .

Основные операции над комплексными числами в тригонометрической форме:

Пусть $z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

Тогда

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$,

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$,

3) $z^n = [r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n \cdot [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$, где $n \in \mathbb{N}$,

4)

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}, \quad \text{где}$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \right], \quad k = \overline{0; n-1}$$

ПЕРЕХОД ОТ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА К ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ

Пусть $z = x + iy$.

Тогда

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \arg z = \varphi = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0 ; \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0 ; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y > 0 ; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y < 0 . \end{cases}$$

Основные операции над комплексными числами в показательной форме:

Пусть $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$.

а) умножение

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

б) деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

в) возведение в степень

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi},$$

г) извлечение корня

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k = \overline{0; n-1}.$$

ПРИМЕР 1 – Найти действительную и мнимую часть комплексного числа $\frac{1+2i}{4+3i}$.

Решение –

$$\frac{1+2i}{4+3i} = \frac{(1+2i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{4+6}{25} + \frac{8i-3i}{25} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re} z = \frac{2}{5}, \operatorname{Im} z = \frac{1}{5}.$$

ПРИМЕР 2 – Возвести в степень комплексное число $(-\sqrt{3} - i)^5$.

Решение – Представим число $-\sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме:

$$-\sqrt{3} - i = 2[\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi].$$

Возводим в степень по формуле:

$$\begin{aligned} (-\sqrt{3} - i)^5 &= 2^5[\cos \frac{35}{6}\pi + i \sin \frac{35}{6}\pi] = \\ &= 32[\cos(6\pi - \frac{\pi}{6}) + i \sin(6\pi - \frac{\pi}{6})] = 32[\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}] = \\ &= 32[\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}] = 16\sqrt{3} - 16i. \end{aligned}$$

Ответ: $(-\sqrt{3} - i)^5 = 16\sqrt{3} - 16i$.

ПРИМЕР 3 – Извлечь корень из комплексного числа $\sqrt[3]{1 + i}$.

Решение – Представим число $1 + i$ в тригонометрической форме:

$$1 + i = \sqrt{2}[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}].$$

Извлекаем корень третьей степени по формуле, получаем три различных значения:

$$\sqrt[3]{1 + i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}[\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3}], \quad (k = 0, 1, 2),$$

или

$$\begin{aligned} z_1|_{k=0} &= \sqrt[6]{2}[\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}], \\ z_2|_{k=1} &= \sqrt[6]{2}[\cos \frac{9}{12}\pi + i \sin \frac{9}{12}\pi] = \sqrt[6]{2}[\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi], \\ z_3|_{k=2} &= \sqrt[6]{2}[\cos \frac{17}{12}\pi + i \sin \frac{17}{12}\pi] = \\ &= \sqrt[6]{2}[\cos(\pi + \frac{5}{12}\pi) + i \sin(\pi + \frac{5}{12}\pi)] = \\ &= \sqrt[6]{2}[-\cos \frac{5}{12}\pi - i \sin \frac{5}{12}\pi]. \end{aligned}$$

Так как

$$\sqrt{-1} = 1[\cos \frac{\pi + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2}], k = 0, 1,$$

то $\sqrt{-1}$, имеет два значения: i и $-i$. Таким образом, число i – одно из значений $\sqrt{-1}$.

Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Отметим наиболее часто встречающиеся подмножества $\mathbb{C}$:

$|z - z_0| = r$ – окружность с центром в точке z_0 и радиуса r ;

$|z - z_0| < \varepsilon$ – ε -окрестность точки z_0 ;

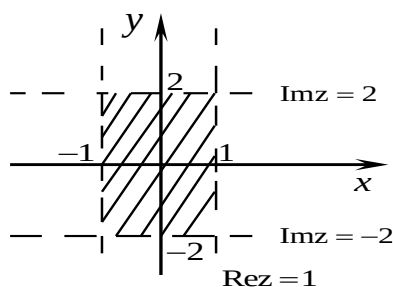
$\text{Im}z > 0$, ($\text{Im}z < 0$) – верхняя (нижняя) полуплоскость;

$\text{Re}z > 0$, ($\text{Re}z < 0$) – правая (левая) полуплоскость.

ПРИМЕР 4 – Изобразить область, заданную неравенствами

$$|\text{Re}z| < 1, |\text{Im}z| < 2.$$

Решение –



1.2 Последовательности комплексных чисел

1.2.1 Определения и основные утверждения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Последовательностью комплексных чисел называется перенумерованное множество комплексных чисел.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Последовательностью комплексных чисел называется функция, заданная на множестве натуральных чисел и имеющая множеством значений некоторое множество комплексных чисел, т.е. $z_n : \mathbb{N} \rightarrow Z$, где $Z \subseteq \mathbb{C}$.*

Принято обозначать:

n (или k) – аргумент последовательности,

z_n, w_n – значения функции.

Записывают последовательность:

$\{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$ – развернутая запись;

$\{z_n\}$ – короткая запись (где z_n – общий член последовательности).

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Число $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ называется **пределом последовательности** $\{z_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $|z_n - z_0| < \varepsilon$, $\forall n > N$.

Записывают: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, $z_n \rightarrow \infty$.

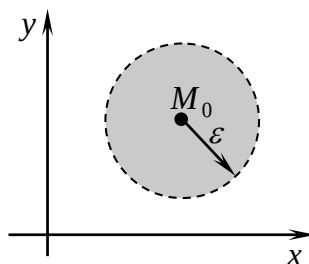
Говорят: *последовательность $\{z_n\}$ сходится (стремится) к z_0* .

Последовательность, имеющую предел, называют **сходящейся** (сходящейся к z_0). Последовательность, не имеющую предела, называют **расходящейся**.

Далее дадим геометрическую интерпретацию предела последовательности комплексных чисел. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0 \leftrightarrow M_0(x_0, y_0)$.

ε -окрестностью числа z_0 называют открытый круг с центром в точке M_0 и радиуса ε .

Обозначают: $U(z_0, \varepsilon)$.



$\Rightarrow$ если $z = x + iy \in U(z_0, \varepsilon)$, то $|M_0 M| < \varepsilon$ (где $M(x, y)$)

$\Rightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow |z - z_0| < \varepsilon$.

Таким образом, $U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ (алгебраическое определение ε -окрестности точки z_0).

Если $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, то с геометрической точки зрения это означает, что *в любой ε -окрестности точки z_0 находятся все члены последовательности $\{z_n\}$, за исключением может быть конечного их числа*. (Геометрическая интерпретация предела последовательности комплексных чисел).

$\Rightarrow z_0$ – точка «сгущения» последовательности $\{z_n\}$.

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$.

ТЕОРЕМА 1 (о связи сходимости последовательностей $\{z_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$) – Последовательность комплексных чисел $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ сходится к

числу $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда сходятся последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО –

$$\text{Пусть } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + iy_n) = x_0 + iy_0 = z_0,$$

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon.$$

Тогда при $n > N$ выполняются неравенства

$$|x_n - x_0| < \varepsilon, \quad |y_n - y_0| < \varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

Пусть теперь существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ выполняются неравенства

$$|x_n - x_0| < \varepsilon/\sqrt{2}, \quad |y_n - y_0| < \varepsilon/\sqrt{2}.$$

При $n > N$ получаем

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon.$$

Т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что часть свойств последовательностей действительных чисел остаются справедливыми для последовательностей комплексных чисел.

А именно, справедливы следующие утверждения:

1) *Отбрасывание (добавление) конечного числа членов последовательности не влияет на ее сходимости.*

2) *Последовательность может иметь не более одного предела.*

3) *Если $\{z_n\} \rightarrow z_0$, то $\{|z_n|\} \rightarrow |z_0|$.*

4) *Сходящаяся последовательность ограничена.*

5) *Пусть $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ – сходящиеся последовательности и*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_0.$$

Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже являются сходящимися последовательностями, причем

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = z_0 \pm w_0;$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) = z_0 \cdot w_0;$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z_n}{w_n} \right) = \frac{z_0}{w_0} \quad (w_0 \neq 0).$$

б) Если $\{z_n\}$ сходится к z_0 , то $\forall c \in \mathbb{C}$ последовательность $\{cz_n\}$ тоже сходится, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cz_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = cz_0$$

(следствие свойства 5(b)).

Пусть задана последовательность $\{z_n\} = \{r_n \cdot (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)\}$.

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие сходимости последовательности комплексных чисел) – Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$.

Тогда последовательность $\{z_n\} = \{r_n \cdot (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)\}$ – сходится, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

1.2.2 Неалгебраические операции с комплексными числами

1) Если $x \in \mathbb{R}$, то

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n.$$

Пусть $z = x + iy$. Полагаем:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n.$$

$\Rightarrow$ по определению

$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y). \quad (1.1)$$

Замечание - Из (1.1), при $x = 0$, получаем

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

$$\Rightarrow z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Представление комплексного числа в виде $z = r \cdot e^{i\varphi}$ (где r – модуль комплексного числа, φ – аргумент комплексного числа), называется **показательной формой записи комплексного числа**.

Формула

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

называется **формулой Эйлера**.

2) Если $\forall y \in \mathbb{R}$, то $e^{iy} = \cos y + i \sin y$,

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y.$$

Складывая и вычитая последние формулы, получаем

$$\Rightarrow \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Пусть $z = x + iy$. Полагаем:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Справедливы следующие утверждения:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2.$$

3) Если $\forall x \in \mathbb{R}$, то

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Пусть $z = x + iy$. Полагаем

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Справедливы следующие утверждения:

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos z;$$

$$\sin(iz) = i \cdot \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{sh}(iz) = i \cdot \sin z;$$

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z.$$

ПРИМЕР 5 - Вычислить: а) $\sqrt[4]{-27i}$; б) $\operatorname{ch}(3 + \frac{\pi}{4}i)$.

Решение –

$$\begin{aligned} \text{а) } \sqrt[4]{-27i} &= \sqrt[4]{27 \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i}} = \\ &= \left\{ \sqrt[4]{27} \cdot e^{-\frac{\pi}{8}i}, \sqrt[4]{27} \cdot e^{-\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{4}i}, \sqrt[4]{27} \cdot e^{-\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{4}i}, \sqrt[4]{27} \cdot e^{-\frac{\frac{\pi}{2}+6\pi}{4}i} \right\} = \\ &= \left\{ \sqrt[4]{27} \cdot e^{-\frac{\pi}{8}i}, \sqrt[4]{27} \cdot e^{\frac{3\pi}{8}i}, \sqrt[4]{27} \cdot e^{\frac{7\pi}{8}i}, \sqrt[4]{27} \cdot e^{\frac{11\pi}{8}i} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \operatorname{ch}(3 + \frac{\pi}{4}i) &= \operatorname{chi}(\frac{3}{i} + \frac{\pi}{4}) = \operatorname{chi}(\frac{\pi}{4} - 3i) = \cos(\frac{\pi}{4} - 3i) = \\ &= \cos \frac{\pi}{4} \cos 3i + \sin \frac{\pi}{4} \sin 3i = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ch} 3 + i \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} 3. \end{aligned}$$

4) Пусть $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Число w назовем **натуральным логарифмом числа z** , если $e^w = z$.

Замечание - Натуральный логарифм числа z определен неоднозначно.

Все значения натурального логарифма z обозначают $\text{Ln} z$.

Если $z = x + iy = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то

$$\text{Ln} z = \ln r + i \cdot \text{Arg} z = \ln r + i\varphi + i \cdot 2\pi k.$$

Число $\ln r + i\varphi = \ln|z| + i \cdot \arg z$ называется **главным значением логарифма** числа z и обозначают $\ln z$.

Справедливы **равенства множеств**

$$1) \text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \text{Ln} z_1 + \text{Ln} z_2,$$

$$2) \text{Ln} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Ln} z_1 - \text{Ln} z_2 \Rightarrow \text{Ln} z - \text{Ln} z = 2\pi ki.$$

5) Аналогично, как обратные к соответствующим операциям, вводятся операции

$$\text{Arcsin} z, \text{Arccos} z, \text{Arctg} z, \text{Arcctg} z,$$

$$\text{Arcsh} z, \text{Arcch} z, \text{Arcth} z, \text{Arccth} z.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\text{Arcsin} z = -i \text{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}), \text{Arccos} z = -i \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\text{Arctg} z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right), \text{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \left(\frac{iz-1}{iz+1} \right),$$

$$\text{Arcsh} z = \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}), \text{Arcch} z = \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\text{Arcth} z = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\frac{1+z}{1-z} \right), \text{Arccth} z = \frac{1}{2} \text{Ln} \left(\frac{z+1}{z-1} \right).$$

1.2.3 Бесконечно большие последовательности комплексных чисел

Пусть задана последовательность $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Последовательность $\{z_n\}$ называют **бесконечно большой**, если $\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $|z_n| > M, \forall n > N$.

Геометрическая интерпретация бесконечно большой последовательности:

Дополним множество $\mathbb{C}$ элементом, обозначаемым ∞ .

∞ называют *бесконечно удаленной точкой комплексной плоскости* и полагают:

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0;$$

$$z \cdot \infty = \infty, \quad \forall z \neq 0; \quad z \pm \infty = \infty, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Выражения $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \pm \infty$ не определены.

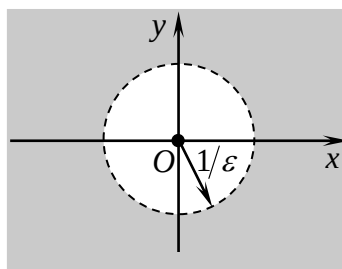
Комплексную плоскость, дополненную символом ∞ , называют *расширенной комплексной плоскостью* и обозначают $\bar{\mathbb{C}}$.

ε -окрестностью точки ∞ называют множество точек $z \in \mathbb{C}$, для которых

$$|z| > \frac{1}{\varepsilon},$$

т.е. ε -окрестность точки ∞ – область, вне круга с центром в точке O и радиуса $1/\varepsilon$.

Обозначают: $U(\infty, \varepsilon)$.



Если $\{z_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то с геометрической точки зрения это означает, что *в любой ε -окрестности точки ∞ находятся все члены последовательности $\{z_n\}$, за исключением может быть конечного их числа.*

(Геометрическая интерпретация бесконечно большой последовательности).

Записывают: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, $z_n \rightarrow \infty$.

Пусть задана последовательность $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$.

ТЕОРЕМА 3 (о связи бесконечно больших последовательностей $\{z_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$) - Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – бесконечно большие последовательности, то последовательность $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ тоже является бесконечно большой.

Замечание - Утверждение, обратное теореме 3, неверно.

1.3 Функция комплексного переменного

1.3.1 Основные определения

Пусть D, E – множества комплексных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Если $\forall z \in D$ поставлен в соответствие элемент $w \in E$ (*один или несколько*), то говорят, что на множестве D задана **функция (отображение)** с множеством значений E .

Записывают: $f: D \rightarrow E, \quad w = f(z)$
(где f – закон, осуществляющий соответствие).

Называют: D – множество определения функции,

$z (z \in D)$ – аргумент (независимая переменная),

E – множество значений,

$w (w \in E)$ – зависимая переменная (функция).

Если $z \rightarrow w$, то функцию называют **однозначной**.

Если $z \rightarrow w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$, то функцию называют **многозначной**.

Пусть задана функция $w = f(z)$.

Если $z = x + iy$, $w = u + iv$, то $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ называются соответственно **действительной** и **мнимой частью функции** $f(z)$.

Обозначают: $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$.

Так как $f(z)$ характеризуют 4 переменные (x, y, u, v) , то геометрическая интерпретация $f(z)$ невозможна. Для геометрической иллюстрации $f(z)$ используют 2 экземпляра комплексных плоскостей: O_1xy и O_2uv ($D \subset O_1xy$, $E \subset O_2uv$).

Задание функции $f(z)$ устанавливает соответствие между двумя множествами D и E :

$$z \rightarrow w, \quad \text{где } z \in D, w \in E.$$

При этом устанавливается и обратное соответствие: $w \rightarrow z$.

Функция $z = \varphi(w)$ называется **обратной** к $f(z)$.

Если $f(z)$ и ее обратная $\varphi(w)$ – обе однозначны, то функция $f(z)$ называется **однолистной**.

1.3.2 Элементарные функции комплексного переменного

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Элементарной функцией называется функция, которая может быть задана одной формулой $w = f(z)$, где $f(z)$ – выражение, составленное из основных элементарных функций и комплексных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ Ф.К.П.

1) Степенная: $w = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Свойства функции

а) $D = \bar{\mathbb{C}}$, $E = \bar{\mathbb{C}}$ ($\infty^n = \infty$);

б) однозначная, однолистная.

2) Корень n -степени ($n \in \mathbb{N}$): $w = \sqrt[n]{z}$.

Свойства функции

а) $D = \bar{\mathbb{C}}$, $E = \bar{\mathbb{C}}$,

б) многозначна $\forall z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0; \infty\}$.

3) Показательная функция: $w = e^z \stackrel{\text{def}}{=} e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$.

Свойства функции

а) $D = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

б) $e^z|_{z=x} = e^x$;

в) e^z – периодическая, $T = 2\pi i$.

4) Тригонометрические функции: $w = \cos z$, $w = \sin z$, $w = \operatorname{tg} z$, $w = \operatorname{ctg} z$.

Свойства $w = \cos z$, $w = \sin z$

а) $D = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}$;

б) $\cos z|_{z=x} = \cos x$, $\sin z|_{z=x} = \sin x$;

в) периодические, $T = 2\pi$;

г) неограниченные;

д) $\cos z$ – четная, $\sin z$ – нечетная;

е) имеют только действительные нули

$$\cos z = 0 \text{ при } z = \pi/2 + \pi k, \quad \sin z = 0 \text{ при } z = \pi k.$$

Свойства $w = \operatorname{tg} z$, $w = \operatorname{ctg} z$

а) $D(\operatorname{tg} z) = \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + \pi k\}$, $E(\operatorname{tg} z) = \mathbb{C}$,

$$D(\operatorname{ctg} z) = \mathbb{C} \setminus \{\pi k\}, \quad E(\operatorname{ctg} z) = \mathbb{C};$$

б) $\operatorname{tg} z|_{z=x} = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} z|_{z=x} = \operatorname{ctg} x$;

в) периодические, $T = \pi$;

г) нечетные;

д) имеют только действительные нули

$$\operatorname{ctg} z = 0 \text{ при } z = \pi/2 + \pi k,$$

$$\operatorname{tg} z = 0 \text{ при } z = \pi k.$$

5) Гиперболические функции: $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$.

Свойства $w = \operatorname{ch} z$, $w = \operatorname{sh} z$

а) $D = \mathbb{C}$, $E = \mathbb{C}$;

б) $\operatorname{ch} z|_{z=x} = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} z|_{z=x} = \operatorname{sh} x$;

в) периодические, $T = 2\pi i$;

г) $\operatorname{ch} z$ – четная, $\operatorname{sh} z$ – нечетная;

д) справедливы равенства:

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2$$

$$\Rightarrow \operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z;$$

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2$$

$$\Rightarrow \operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \cdot \operatorname{ch} z;$$

$$\operatorname{ch}(x + iy) = \operatorname{ch} x \cdot \cos y + i \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y;$$

$$\operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh} x \cdot \cos y + i \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y.$$

Свойства $w = \operatorname{th} z$, $w = \operatorname{cth} z$

а) $D(\operatorname{th} z) = \mathbb{C} \setminus \{(\pi/2 + \pi k)i\}$, $E(\operatorname{th} z) = \mathbb{C}$,

$$D(\operatorname{cth} z) = \mathbb{C} \setminus \{\pi k i\}, E(\operatorname{cth} z) = \mathbb{C};$$

б) $\operatorname{th} z|_{z=x} = \operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} z|_{z=x} = \operatorname{cth} x$;

в) периодические, $T = \pi i$;

г) нечетные.

6) Натуральный логарифм: $w = \operatorname{Ln} z$:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \cdot \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i \cdot \operatorname{arg} z + i \cdot 2\pi k.$$

Многозначная функция, определенная на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Функция $\ln z = \ln|z| + i \cdot \operatorname{arg} z$ называется *главным значением логарифма*.

7) Обратные тригонометрические:

$$\operatorname{Arcsin} z, \operatorname{Arccos} z, \operatorname{Arctg} z, \operatorname{Arcctg} z.$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}), \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right), \operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{iz-1}{iz+1}\right) \quad (z \neq \pm i).$$

8) Общая степенная: $w = z^\mu$, где $\mu \in \mathbb{C}$.

Многозначная функция, определенная на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ формулой

$$w = z^\mu \stackrel{\text{def}}{=} e^{\mu \cdot \operatorname{Ln} z}.$$

Функция $w = e^{\mu \cdot \operatorname{Ln} z}$ называется *главным значением общей степенной функции*.

9) Общая показательная: $w = a^z$, где $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Многозначная функция, определенная на $\mathbb{C}$ формулой

$$w = a^z \stackrel{\text{def}}{=} e^{z \cdot \operatorname{Ln} a}.$$

Функция $w = e^{z \cdot \operatorname{Ln} a}$ называется *главным значением общей показательной функции*.

1.4 Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, кроме, может быть, самой точки z_0 .

$U^*(z_0, \delta) = U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ – **проколота окрестность точки z_0** .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 (по Коши, на языке ε - δ). Число $w_0 \in \mathbb{C}$ называется **пределом функции $f(z)$ при z стремящемся к z_0** (пределом функции $f(z)$ в точке z_0), если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что если $z \in U^*(z_0, \delta)$, то $f(z) \in U(w_0, \varepsilon)$ или в других обозначениях:

число $w_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ называется **пределом функции $f(z)$** , если $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$ такое, что $\forall z \mid z - z_0 \mid < \delta$ выполняется неравенство $\mid f(z) - w_0 \mid < \varepsilon$.

В этом случае пишут, что $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 (по Гейне, на языке последовательностей). Число $w_0 \in \mathbb{C}$ называется **пределом функции $f(z)$ при z стремящемся к z_0** , если для любой последовательности $\{z_n\}$ значений аргумента, стремящейся к z_0 , соответствующая последовательность значений функции $\{f(z_n)\}$ сходится к w_0 .

ТЕОРЕМА 4 - Определение предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.

Обозначают: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$, $f(z) \rightarrow w_0$, при $z \rightarrow z_0$.

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

ТЕОРЕМА 5 - Число $w_0 = u_0 + iv_0$ является пределом функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ при $z \rightarrow z_0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

Для комплексных функций $f(z)$ и $g(z)$ имеют место свойства, аналогичные соответствующим свойствам действительных функций.

Если существуют пределы

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B, \quad \text{то}$$
$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = A + B,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = A \cdot B,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} = \frac{A}{B}, \quad \text{если} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0.$$

Пусть $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Функция $f(z)$ называется **непрерывной в точке z_0** , если справедливо равенство

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11 (на языке ε - δ). Функция $f(z)$ называется **непрерывной в точке z_0** , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что

$$\text{если } z \in U(z_0, \delta) \quad (\text{т.е. } |z - z_0| < \delta),$$

$$\text{то } f(z) \in U(f(z_0), \varepsilon) \quad (\text{т.е. } |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon).$$

Функция, непрерывная в каждой точке множества $G \subseteq \mathbb{C}$, называется **непрерывной на множестве G** .

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Из теоремы 5 получаем, что справедлива следующая теорема

ТЕОРЕМА 6 - Функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 \Leftrightarrow$ функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Теоремы о непрерывных функциях действительного переменного имеют место и для функций комплексного переменного:

- 1) сумма, разность и произведение двух функций комплексного переменного $f(z)$ и $g(z)$, непрерывных в области D , также является непрерывной в этой области;
- 2) отношение $f(z) / g(z)$ двух непрерывных функций непрерывно в тех точках области D , где $g(z) \neq 0$.

В частности, для функций комплексного переменного будет справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7 (аналог теоремы Вейерштрасса для ф.к.п.) - Пусть $D \subset \mathbb{C}$, D – замкнутое и ограниченное, $f(z)$ – непрерывна на D . Тогда

- 1) $f(z)$ ограничена на D , т.е. $\exists M > 0$ такое, что $|f(z)| < M$, $\forall z \in D$;
- 2) модуль функции $f(z)$ достигает в D наибольшего и наименьшего значения.

1.5 Дифференцирование функции комплексного переменного

1.5.1 Производная функции комплексного переменного

Пусть $w = f(z)$ – однозначная функция, $f(z)$ определена в точке z_0 и некоторой ее окрестности. Придадим z_0 приращение Δz такое, что $z_0 + \Delta z \in D(f)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Производной функции $w = f(z)$ в точке z_0 называется*

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

(если он существует и конечен).

Обозначают:

$$w'(z_0), \quad \frac{dw(z_0)}{dz}, \quad f'(z_0), \quad \frac{df(z_0)}{dz}.$$

Зависимость $z \rightarrow f'(z)$ является функцией. Ее называют **производной функции $f(z)$** и обозначают:

$$w'(z), \frac{dw(z)}{dz}, f'(z), \frac{df(z)}{dz}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Функция $w = f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0 , если ее приращение в этой точке может быть записано как сумма линейной относительно Δz части и бесконечно малой более высокого порядка чем Δz , т.е.*

$$\Delta f(z_0) = A \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta z, \quad (1.2)$$

где A – комплексное число, $\alpha = \alpha(z_0, \Delta z)$ – бесконечно малая при $\Delta z \rightarrow 0$.

Замечание - (1.2) можно записать в виде

$$\Delta f(z_0) = A \cdot \Delta z + \beta(\Delta z),$$

где $\beta(\Delta z)$ – бесконечно малая более высокого порядка чем Δz .

Слагаемое $A \cdot \Delta z$ в выражении (1.2) называют **дифференциалом функции $w = f(z)$ в точке z_0** и обозначают: $dw(z_0)$, $df(z_0)$.

ТЕОРЕМА 8 (о связи дифференцируемости с существованием производной) - *Функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда существует производная функции в этой точке $f'(z_0)$.*

При этом для ее дифференциала в точке z_0 справедливо равенство

$$dw(z_0) = f'(z_0) \cdot \Delta z. \quad (1.3)$$

ТЕОРЕМА 9 (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции) - Функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow$ 1) функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в $M_0(x_0, y_0)$,

2) в точке $M_0(x_0, y_0)$ выполняются условия Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Замечание - Если $f'(z_0)$ существует, то $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$.

Пусть $w = f(z)$.

ТЕОРЕМА 10 (об условии, эквивалентном условиям Коши – Римана) - Условия Коши – Римана эквивалентны условию

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ - Если функция элементарная, то для нее условия Коши – Римана выполняются и производная находится по обычным правилам.

ПРИМЕР 6 - Найти, где это возможно, производную функции:

а) $w = e^{\sin z^2} \cdot \sqrt{z}$; б) $w = \frac{\bar{z}+1}{z} \cdot \operatorname{Im} z$.

Решение – а) Имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \forall z \in D(w). \text{ Следовательно, } w'(z) \exists \quad \forall z \in D(w).$$

$$\text{Тогда } w' = e^{\sin z^2} \cdot \cos z^2 \cdot 2z \cdot \sqrt{z} + \frac{e^{\sin z^2}}{2\sqrt{z}}.$$

б) Пусть $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, тогда $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

$$w = \frac{\bar{z}+1}{z} \cdot \operatorname{Im} z = \frac{\bar{z}+1}{z} \cdot \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{z\bar{z} + z - \bar{z}^2 - \bar{z}}{2iz}.$$

Имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2iz} (z - 2\bar{z} - 1) = 0 \Rightarrow z - 2\bar{z} - 1 = 0,$$

$$(x - 2x - 1) + i(y + 2y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x - 1 = 0, \\ 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z = -1 + 0i, \\ z_0 = -1. \end{matrix}$$

Таким образом, функция имеет производную только в точке $z_0 = -1$.

Имеем:

$$w'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{\bar{z}+1}{z} \cdot \operatorname{Im} z = \frac{x-iy+1}{x+iy} \cdot y = \frac{((x+1)-iy)(x-iy)}{x^2+y^2} \cdot y = \\ &= \frac{(x+1)x-y^2-ixy-i(x+1)y}{x^2+y^2} \cdot y = \frac{x^2y+xy-y^3}{x^2+y^2} - i \frac{2xy^2+y^2}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u(x, y) = \frac{x^2y+xy-y^3}{x^2+y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{2xy^2+y^2}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(2xy+y)(x^2+y^2) - 2x(x^2y+xy-y^3)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(-1) = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2y^2(x^2+y^2) - 2x(2xy^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(-1) = 0.$$

Таким образом,

$$w'(-1) = 0 + i0 = 0.$$

1.5.2 Аналитические функции

Областью на комплексной плоскости называют открытое и связное множество.

(т.е. множество, каждая точка которого – внутренняя и любые две точки которого можно соединить линией, целиком лежащей в этом множестве).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Функция $f(z)$ называется **аналитической в точке z_0** , если она дифференцируема в этой точке и во всех точках некоторой окрестности точки z_0 .

Аналитические функции называют также *регулярными, голоморфными, моногенными, правильными*.

Свойства аналитических функций:

1) Если функция $f(z)$ аналитическая в окрестности точки z_0 , то $f(z)$ непрерывна в этой окрестности.

2) Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитичны в области D , то $f(z) \pm \varphi(z)$ и $f(z) \cdot \varphi(z)$ тоже аналитичны в этой области.

Кроме того, их частное $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ аналитично всюду в области D , где $\varphi(z) \neq 0$.

3) Если функция $f(z): D \rightarrow E$ – аналитична в области D , $\varphi(z): E \rightarrow G$ – аналитична в области E , то функция $\varphi(f(z))$ – аналитична в D .

4) Если в окрестности точки z_0 определена аналитическая функция $f(z)$ такая, что $f'(z_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ определена единственная обратная функция $z = \varphi(w)$, которая будет аналитической в этой окрестности и для которой справедливо равенство

$$\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

5) Пусть $f(z)$ – аналитическая в области D . Тогда:

а) если $f(z) \neq \text{const}$ в D , то $|f(z)|$ не достигает в D своего наименьшего значения;

б) если $f(z) \neq 0$ в D , то $|f(z)|$ не достигает в D своего наибольшего значения;

в) если $f(z) \neq 0$ в D и $f(z)$ непрерывна на границе области D , то $|f(z)|$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения на границе области D . (принцип максимума модуля)

6) Если $f(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ и $f(z)$ – ограниченная и аналитическая на всей комплексной плоскости, то $f(z) = \text{const}$. (теорема Лиувилля)

7) Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая в области D , то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармоническими.

Функция $\varphi(x, y)$ называется *гармонической*, если она удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Две гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, удовлетворяющие условиям Коши – Римана называются *сопряженной парой гармонических функций* (порядок функций в паре существенен).

8) Если $f(z)$ – аналитическая в области D , то действительная (мнимая) часть определяет ее с точностью до константы.

9) Пусть $f(z)$ – аналитическая в области D , $z_0 \in D$ и $f'(z_0) \neq 0$.

Тогда все бесконечно малые дуги, выходящие из точки z_0 при отображении $f(z)$ поворачиваются на один и тот же угол, равный $\arg f'(z_0)$, и получают одно и то же растяжение, равное $|f'(z_0)|$.

(геометрический смысл производной аналитической функции)

ТЕОРЕМА 11 – Для того чтобы функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ была аналитической в области D необходимо и достаточно, чтобы частные производные первого порядка функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были непрерывны в D и выполнялись условия Коши-Римана.

ТЕОРЕМА 12 - Каждая элементарная функция комплексного переменного является аналитической функцией во всей области своего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Точки, в которых функция является аналитической, называют **правильными** точками функции. Точки, в которых функция не является аналитической, называют **особыми** точками функции.

ПРИМЕР 7. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию по известной мнимой части и значению $f(z_0)$:

$$v(x, y) = 2xy + x, \quad f(0) = 0.$$

Решение – Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -(2y + 1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 2x dx - (2y + 1) dy = \\ &= 2x dx - 2y dy - dy = d(x^2 - y^2 - y). \end{aligned}$$

Тогда

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - y + C.$$

Найдем значение C :

$$u(0,0) = 0^2 - 0^2 - 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} w(z) &= x^2 - y^2 - y + i(2xy + x) = (x^2 + 2xyi - y^2) + (ix - y) = \\ &= (x + iy)^2 + i(x + iy) = z^2 + iz. \end{aligned}$$

1.6 Интегрирование функций комплексного переменного

1.6.1 Интеграл от функции комплексного переменного

Пусть (AB) – простая (т.е. без кратных точек) спрямляемая (т.е. имеющая длину) кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Выберем на (AB) направление:

- а) A – начало, B – конец, если (AB) не замкнутая;
- б) против часовой стрелки, если (AB) – замкнутая.

Пусть $f(z)$ – однозначная функция, определенная на (AB) .

1. Разобьем кривую (AB) произвольным образом на n частей точками $z_0=A, z_1, \dots, z_n=B$ в направлении от A к B .
2. На каждой дуге $(z_{i-1}z_i)$ выберем произвольную точку ζ_i и вычислим произведение $f(\zeta_i) \cdot \Delta z_i$, где $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$.

Сумму

$$I_n(z_i, \zeta_i) = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \cdot \Delta z_i$$

назовем **интегральной суммой** для функции $f(z)$ по кривой (AB) (соответствующей данному разбиению кривой (AB) и данному выбору точек ζ_i).

Пусть $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta z_i|$.

Число I называется **пределом интегральных сумм** $I_n(z_i, \zeta_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения кривой (AB) у которого $\lambda < \delta$, при любом выборе точек ζ_i выполняется неравенство

$$|I_n(z_i, \zeta_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(z_i, \zeta_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, то его называют **интегралом от функции $f(z)$ по кривой (AB)** .

Обозначают:

$$\int_{(AB)} f(z) dz, \quad \oint_{(AB)} f(z) dz.$$

Свойства интеграла от функции комплексного переменного:

Замечание - предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. Интеграл от функции комплексного переменного зависит от направления движения по кривой. При изменении направления движения по кривой (AB) интеграл меняет знак, т.е.

$$\int_{(AB)} f(z) dz = - \int_{(BA)} f(z) dz$$

2. Если кривая (AB) замкнута, то интеграл не зависит выбора начальной точки A , а зависит от направления обхода кривой.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int_{(AB)} c \cdot f(z) dz = c \cdot \int_{(AB)} f(z) dz.$$

4. Интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е.

$$\int_{(AB)} [f_1(z) \pm f_2(z)] dz = \int_{(AB)} f_1(z) dz \pm \int_{(AB)} f_2(z) dz$$

5. Если кривая (AB) разбита точкой K на две части (AK) и (KB) , то

$$\int_{(AB)} f(z) dz = \int_{(AK)} f(z) dz + \int_{(KB)} f(z) dz$$

(свойство аддитивности интеграла от фкп).

$$6. \left| \int_{(AB)} f(z) dz \right| \leq \int_{(AB)} |f(z)| d\ell,$$

где $d\ell$ – дифференциал длины дуги.

7. Если во всех точках кривой (AB) выполняется неравенство $|f(z)| < M$, то

$$\left| \int_{(AB)} f(z) dz \right| \leq M \cdot \ell,$$

где ℓ – длина кривой (AB) .

Вычисление интегралов от функций комплексного переменного:

ТЕОРЕМА 13 (существования интеграла от фкп) - Если (ℓ) – гладкая кривая, и функция $f(z)$ непрерывна на (ℓ) , то $f(z)$ интегрируема по кривой (ℓ) и справедливо равенство

$$\int_{(\ell)} f(z) dz = \left[\int_{(\ell)} u(x, y) dx - v(x, y) dy \right] + i \left[\int_{(\ell)} v(x, y) dx + u(x, y) dy \right],$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$ – действительная и мнимая часть функции $f(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – Если $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$,

$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k,$$

то

$$\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k, \quad f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k),$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_{(\ell)} f(z) dz &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + i \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{(\ell)} f(z) dz = \left[\int_{(\ell)} u(x, y) dx - v(x, y) dy \right] + i \left[\int_{(\ell)} v(x, y) dx + u(x, y) dy \right].$$

Данная формула дает выражение интеграла от функции $f(z)$ комплексного переменного через два действительных криволинейных интеграла.

Если функция $f(z)$ непрерывна, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ также непрерывны, но тогда существуют криволинейные интегралы

$$\int_{(\ell)} u dx - v dy, \int_{(\ell)} v dx + u dy,$$

а следовательно, и сам интеграл

$$\int_{(\ell)} f(z) dz.$$

ТЕОРЕМА 14 - Если гладкая кривая (ℓ) задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\alpha \leq t \leq \beta$ ($A \leftrightarrow \alpha$, $B \leftrightarrow \beta$), и функция $f(z)$ интегрируема по кривой (ℓ) , то справедливо равенство

$$\int_{(\ell)} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t) dt,$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$ — комплексная форма параметрических уравнений кривой (ℓ) , $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

ПРИМЕР 8. Вычислить интеграл

$$I = \oint_l \frac{dz}{z-a},$$

где l — окружность радиуса R с центром в точке a .

Решение — Данную окружность параметрически можно задать в виде $z(t) = a + Re^{it}$, $0 < t < 2\pi$.

Применяя последнюю формулу, находим

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{Re^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

ПРИМЕР 9. Вычислить интеграл

$$I = \oint_l (z-a)^n dz, \text{ где } n \neq -1,$$

где l : $|z-a| = R$ или $z(t) = a + Re^{it}$, $0 < t < 2\pi$.

Решение —

$$\begin{aligned} I &= i \int_0^{2\pi} R^n e^{int} R e^{it} dt = R^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = R^{n+1} i \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{(n+1)i} \right|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{R^{n+1}}{n+1} (e^{2\pi i(n+1)} - 1) = 0. \end{aligned}$$

1.6.2 Интегрирование аналитических функции комплексного переменного

Напомним:

ТЕОРЕМА 15 - Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области $D \subset Oxyz$.

Следующие условия эквивалентны:

1) интеграл $\int_{(\ell)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$
не зависит от линии интегрирования;

2) $\oint_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad \forall (\ell) \subset D$;

3) справедливы равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z};$$

4) выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y,z)$, т.е. $du = Pdx + Qdy + Rdz$.

Для плоской кривой и функций двух переменных получим:

ТЕОРЕМА 16 - Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области $D \subset Oxy$.

Следующие условия эквивалентны:

1) интеграл $\int_{(\ell)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
не зависит от линии интегрирования;

2) $\oint_{(\ell)} Pdx + Qdy = 0 \quad \forall (\ell) \subset D$;

3) справедливо равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$;

4) выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т.е. $du = Pdx + Qdy$.

ТЕОРЕМА 17 (Коши, для односвязной области) - Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то интеграл от этой функции по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру (ℓ) , целиком лежащему в D , равен нулю.

Замечания - 1) Порядком связности области называется число связанных частей, на которые разбивается ее граница.

2) Утверждение, обратное теореме 17, тоже справедливо. А именно: Если $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и для любого кусочно-гладкого замкнутого контура $(\ell) \subset D$ выполняется условие

$$\oint_{(\ell)} f(z) dz = 0 ,$$

то $f(z)$ аналитична в D (теорема Морера).

ТЕОРЕМА 18 (о независимости интеграла от аналитической функции от формы кривой) - Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то $\forall A, B \in D$ интеграл

$$\int_{(AB)} f(z) dz$$

не зависит от формы кривой, соединяющей точки A и B .

Пусть G – $(n+1)$ -связная область, $(\ell), (\ell_1), \dots, (\ell_n)$ – ее границы. (ℓ) – внешняя граница G , $(\ell_1), \dots, (\ell_n)$ – внутренние границы G .

ТЕОРЕМА 19 (Коши для многосвязной области) - Пусть кривые $(\ell), (\ell_1), \dots, (\ell_n)$ – кусочно-гладкие, не пересекающиеся и ни одна из областей, ограниченных (ℓ_i) не содержит кривой (ℓ_j) .

Если $f(z)$ аналитична в области G и на ее границах, то

$$\oint_{+(\ell)} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{+(\ell_k)} f(z) dz .$$

1.6.3 Первообразная аналитической функции.

Неопределенный интеграл

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Функция $F(z)$ называется **первообразной функцией** $f(z)$ на множестве D , если $F'(z) = f(z), \forall z \in D$.

Пусть $f(z)$ аналитическая в односвязной области D , $z_0, z \in D$. Тогда интеграл

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

не зависит от формы кривой, соединяющей z_0 и z .

$\Rightarrow$ Если z_0 фиксировано, то обозначим

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z)$$

ТЕОРЕМА 20 (о существовании первообразной) - Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Тогда

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

является первообразной функции $f(z)$ в D .

ТЕОРЕМА 21 (о количестве первообразных). - Любые две первообразные для одной аналитической функции отличаются на константу.

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 21 - Если $f(z)$ аналитическая и $f'(z) = 0$ в некоторой области D , то в этой области $f(z) = \text{const}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Множество всех первообразных функции $f(z)$ называют **неопределенным интегралом** от функции $f(z)$ и обозначают

$$\int f(z) dz.$$

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМ 20 и 21 - Если $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то ее неопределенный интеграл может быть записан в виде

$$\int f(z) dz = \int_{z_0}^z f(z) dz + C$$

где C – произвольная постоянная ($C \in \mathbb{C}$), а интеграл берется вдоль любой кривой в D , соединяющей точки z_0 и z .

ТЕОРЕМА 22 (формула Ньютона – Лейбница для интеграла от аналитической функции) - Если $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то интеграл от $f(z)$ не зависит от формы кривой, соединяющей точки z_1 и z_2 , и справедлива формула:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

1.6.4 Интегральная формула Коши

ТЕОРЕМА 23 (интегральная формула Коши) - Пусть D – односвязная область, ограниченная кусочно-гладким контуром C ; $\bar{D} = D \cup C$ – замыкание области D ; $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда для любой точки $z_0 \in D$ справедлива формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0}.$$

Эта формула называется **интегральной формулой Коши**.

Пусть (ℓ) – кусочно-гладкая кривая; $f(z)$ – непрерывна на (ℓ) . Рассмотрим интеграл

$$\int_{\ell} \frac{f(t) dt}{t - z}, \quad (z \notin \ell).$$

Интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{f(t) dt}{t - z} = F(z),$$

где z – любая точка $\notin (\ell)$, называется **интегралом типа Коши**.

ТЕОРЕМА 24 (об аналитичности интеграла типа Коши) - Функция $F(z)$, определенная интегралом типа Коши, аналитична в любой конечной точке $z \notin (\ell)$. Кроме того, она имеет производные любого порядка, причем справедлива формула

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{f(t) dt}{(t - z)^{n+1}}.$$

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 24 (теорема о производных высших порядков аналитической функции) - Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области D и на ее кусочно-гладкой границе C . Тогда $f(z)$ имеет в D производные любого порядка, причем для них справедлива формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}},$$

где z_0 – любая точка области D .

2 Комплексные ряды и вычеты

2.1 Ряды в комплексной плоскости

2.1.1 Числовые ряды

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. *Выражение вида*

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

называют комплексным числовым рядом.

При этом, члены последовательности $\{z_n\}$ называются **членами ряда** (1-м, 2-м, ..., n -м (общим членом)).

Построим последовательность

$$S_1 = z_1, \quad S_2 = z_1 + z_2, \quad \dots, \quad S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n, \quad \dots$$

Числа $S_1, S_2, \dots, S_n$ называют **частичными суммами ряда** $\sum z_n$ (1-й, 2-й, ..., n -й).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Ряд $\sum z_n$ называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм $\{S_n\}$. При этом, число

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

называют **суммой ряда** $\sum z_n$.

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \mathbb{A}),$$

то говорят, что ряд $\sum z_n$ **расходится** и не имеет суммы.

Пусть задан ряд $\sum z_n = \sum (x_n + iy_n)$.

ТЕОРЕМА 25 (о связи сходимости рядов $\sum (x_n + iy_n)$, $\sum x_n$, $\sum y_n$) -

Ряд $\sum z_n = \sum (x_n + iy_n)$ сходится к $z = x + iy \Leftrightarrow$ сходятся ряды $\sum x_n$, $\sum y_n$, причем x - сумма ряда $\sum x_n$, y - сумма ряда $\sum y_n$.

Из теоремы 25 следует, что все свойства действительных числовых рядов остаются справедливыми для комплексных числовых рядов:

- 1) поведение ряда относительно сходимости не изменится, если добавить (отбросить) конечное число членов ряда;
- 2) если ряд $\sum z_n$ сходится и его сумма равна z , ряд $\sum w_n$ сходится и его сумма равна w , то
 - а) ряд $\sum (z_n \pm w_n)$ - сходится и его сумма равна $z \pm w$;

б) ряд $\sum cz_n$ – сходится и его сумма равна cz ($\forall c \neq 0 \in \mathbb{C}$);

3) если ряд $\sum z_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

(необходимый признак сходимости ряда);

4) в любом сходящемся ряде, любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядок, сохраняет сходимость ряда и величину его суммы (закон ассоциативности для рядов).

ТЕОРЕМА 26 (признак абсолютной сходимости) -

Если ряд $\sum |z_n|$ сходится, то ряд $\sum z_n$ тоже сходится.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Ряд $\sum z_n$ называют **абсолютно сходящимся**, если его ряд модулей $\sum |z_n|$ сходится.

Если ряд $\sum z_n$ – сходится, а его ряд модулей $\sum |z_n|$ – расходится, то ряд $\sum z_n$ называют **условно сходящимся**.

ТЕОРЕМА 27 (о связи абсолютной сходимости рядов $\sum(x_n + iy_n)$, $\sum x_n$, $\sum y_n$) - Ряд $\sum z_n = \sum(x_n + iy_n)$ сходится абсолютно $\Leftrightarrow$ тогда и только тогда, когда ряды $\sum x_n$, $\sum y_n$ сходятся абсолютно.

Из теоремы 27 следует, что все свойства действительных абсолютно сходящихся числовых рядов остаются справедливыми для абсолютно сходящихся комплексных числовых рядов:

1) Если ряды $\sum z_n$ и $\sum w_n$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum(\alpha z_n \pm \beta w_n)$ тоже сходится абсолютно ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$).

2) Если ряд $\sum z_n$ сходится абсолютно, то ряд, полученный из него в результате перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму.

Если ряд $\sum z_n$ сходится условно, то можно так переставить члены ряда, что сумма получившегося ряда будет равна любому, заранее заданному числу. Более того, можно так переставить члены ряда, что получившийся ряд будет расходиться.

Приведем некоторые достаточные признаки абсолютной сходимости. Рассмотрим ряды $\sum z_n$, $\sum |z_n|$, $\sum w_n$, $\sum |w_n|$.

ТЕОРЕМА 28 (признак сравнения абсолютной сходимости в конечной форме) - Если для всех $n > n_0 \geq 1$ выполняется неравенство

$|z_n| \leq |w_n|$, то из сходимости ряда $\sum |w_n|$ следует сходимость ряда $\sum |z_n|$, то есть из абсолютной сходимости ряда $\sum w_n$ следует абсолютная сходи-

мость ряда $\sum z_n$, а из расходимости ряда $\sum |z_n|$ следует расходимость ряда $\sum |w_n|$.

ТЕОРЕМА 29 (предельный признак сравнения) - Пусть существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_n|}{|w_n|} = q.$$

Если $q \in [0, +\infty)$ и ряд $\sum |w_n|$ сходится, то сходится и ряд $\sum |z_n|$.

Если $q > 0$ и ряд $\sum |w_n|$ расходится, то расходится и ряд $\sum |z_n|$.

ТЕОРЕМА 30 (признак Даламбера в предельной форме) - Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = l$, то ряд $\sum z_n$ сходится абсолютно при $l < 1$, при $l > 1$ – расходится. (При $l=1$ необходимо дополнительное исследование.)

ТЕОРЕМА 31 (признак Коши в предельной форме) - Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = l$, то ряд $\sum z_n$ сходится абсолютно при $l < 1$, при $l > 1$ – расходится. (При $l=1$ необходимо дополнительное исследование.)

В некоторых случаях исследование ряда на абсолютную сходимость можно свести к исследованию несобственного интеграла. Основанием для этого является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 32 (интегральный признак Коши) - Пусть неотрицательная на луче $[1, \infty)$ функция $f(x)$ монотонно убывает при $x \rightarrow +\infty$ и такова, что при $n=1, 2, \dots$ имеет место условие: $f(n) = |z_n|$. Тогда ряд $\sum z_n$ сходится абсолютно, если сходится интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx,$$

а ряд $\sum |z_n|$ расходится, если указанный интеграл расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – Пусть x любое из отрезка $[n-1, n]$. Очевидно, что

$$f(n) \leq f(x) \leq f(n-1),$$

так как $f(x)$ монотонно убывает, и в силу условия $f(n) = |z_n|$, имеем

$$|z_n| \leq f(x) \leq |z_{n-1}|.$$

Проинтегрируем последнее неравенство в пределах от $n-1$ до n . Получим:

$$|z_n| \leq \int_{n-1}^n f(x) \leq |z_{n-1}|.$$

Запишем последнее неравенство для всех номеров:

$$|z_2| \leq \int_1^2 f(x) \leq |z_1|, |z_3| \leq \int_2^3 f(x) \leq |z_2|, \dots, |z_n| \leq \int_{n-1}^n f(x) \leq |z_{n-1}|.$$

Складывая эти неравенства почленно, получим:

$$S_n - |z_1| \leq \int_1^n f(x) \leq S_{n-1},$$

где S_n – n -я частичная сумма ряда $\sum |z_n|$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, имеем: последовательность (S_n) и интеграл

$$\int_1^\infty f(x) dx$$

сходятся или расходятся одновременно. Теорема доказана.

2.1.2 Функциональные ряды

Пусть задана последовательность функций комплексного переменного $\{f_n(z)\}$ с общим множеством определения D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. *Выражение вида*

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

называют комплексным функциональным рядом.

При этом, члены последовательности $\{f_n(z)\}$ называются **членами ряда** (0-м, 1-м, ..., n -м (общим членом)).

Пусть $z_0 \in D$. Рассмотрим числовой ряд $\sum f_n(z_0)$.

Если ряд $\sum f_n(z_0)$ сходится, то говорят, что **ряд $\sum f_n(z)$ сходится в точке z_0** .

Множество $D_1 = \{ z_0 \in D \mid \sum f_n(z_0) \text{ —сходится} \}$ называют **областью сходимости функционального ряда $\sum f_n(z)$** .

Функция $f(z)$, определенная на множестве D_1 и такая, что ее значение в любой точке $z_0 \in D_1$ совпадает с суммой числового ряда $\sum f_n(z_0)$, называется **суммой функционального ряда $\sum f_n(z)$** . (1-е определение суммы функционального ряда).

Построим последовательность

$$S_1(z) = f_1(z), S_2(z) = f_1(z) + f_2(z), \dots, S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z), \dots$$

Функции $S_1(z), S_2(z), \dots, S_n(z)$ называются **частичными суммами ряда $\sum f_n(z)$** .

Множество $D_2 = \{ z_0 \in D \mid \{S_n(z_0)\} \text{ —сходится} \}$ называют **областью сходимости функциональной последовательности $\{S_n(z)\}$** .

Функция $f(z)$, определенная на множестве D_2 и такая, что ее значение в любой точке $z_0 \in D_2$ совпадает с пределом последовательности $\{S_n(z_0)\}$, называется **пределом функциональной последовательности $\{S_n(z)\}$** .

Из определения суммы числового ряда, получаем:

а) $D_1 = D_2$;

б) **Предел функциональной последовательности $\{S_n(z)\}$ есть сумма ряда $\sum f_n(z)$** (2-е определение суммы функционального ряда).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Комплексный функциональный ряд $\sum f_n(z)$ называется **равномерно сходящимся** к $f(z)$ на множестве $H \subset D_1$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что

$$|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall n > N \text{ и } \forall z \in H$$

ТЕОРЕМА 33 (критерий Коши равномерной сходимости ряда) - Ряд

$\sum f_n(z)$ сходится равномерно на множестве H к функции $f(z) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ такой, что

$$|S_{n+k}(z) - S_n(z)| = |f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+k}(z)| < \varepsilon,$$

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n > N \text{ и } \forall z \in H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Говорят, что функциональный ряд $\sum f_n(z)$ *мажорируется* на множестве H числовым рядом $\sum a_n$, если $|f_n(z)| < a_n, \forall n$.

ТЕОРЕМА 34 (признак равномерной сходимости Вейерштрасса) - Если ряд $\sum f_n(z)$ мажорируется на H сходящимся числовым рядом $\sum a_n$, то он сходится на H равномерно.

СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

1) Если $\sum f_n(z)$ сходится на множестве $H \subset \mathbb{C}$ равномерно и $\varphi(z)$ – ограничена на H , то ряд $\sum \varphi(z)f_n(z)$ тоже сходится на H равномерно.

2) Пусть $\sum f_n(z)$ сходится к $f(z)$ на множестве $H \subset \mathbb{C}$ равномерно, $z_0 \in H$ и существуют

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_n(z) = c_n.$$

Тогда: а) числовой ряд $\sum c_n$ сходится;

б) сумма ряда $\sum c_n$ равна $c = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$

Иначе говоря,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{z \rightarrow z_0} f_n(z) \right)$$

3) Если ряд $\sum f_n(z)$ сходится на множестве $H \subset \mathbb{C}$ равномерно и в точке $z_0 \in H$ все функции $f_n(z)$ непрерывны, то сумма ряда $f(z)$ тоже непрерывна в точке z_0 .

4) Если функции $f_n(z)$ непрерывны на кусочно-гладкой кривой (AB) и ряд $\sum f_n(z)$ сходится на (AB) равномерно к $f(z)$, то этот ряд можно почленно интегрировать вдоль кривой (AB) , т.е. справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{(AB)} f_n(z) dz \right) = \int_{(AB)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \int_{(AB)} f(z) dz$$

5) Если функции $f_n(z)$ аналитичны в области $H \subset \mathbb{C}$ и ряд $\sum f_n(z)$ сходится в H равномерно, то его сумма $f(z)$ тоже является функцией аналитической в H .

б) Если функции $f_n(z)$ аналитичны в области $H \subset \mathbb{C}$ и ряд $\sum f_n(z)$ сходится к $f(z)$ в H равномерно, то этот ряд можно в H дифференцировать почленно любое число раз, т.е. справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(m)}(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right)^{(m)} = f^{(m)}(z)$$

Замечание - Для почленного дифференцирования действительного функционального ряда требуется более сильное условие – равномерная сходимость ряда производных.

2.1.3 Степенные ряды

Степенным комплексным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

где $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$. Числа a_n называются **коэффициентами степенного ряда**.

Частный случай комплексного степенного ряда – ряд по степеням z :

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n.$$

Будем изучать ряд $\sum a_nz^n$, т.к. результаты на общий случай переносятся заменой $z = z - z_0$.

Степенной ряд $\sum a_nz^n$ сходится хотя бы в одной точке (точке $z = 0$).

ТЕОРЕМА 35 (Абеля для комплексных степенных рядов) -

- 1) Если степенной ряд $\sum a_nz^n$ сходится в точке $z_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно в любой точке z , удовлетворяющей условию $|z| < |z_1|$;
- 2) Если степенной ряд $\sum a_nz^n$ расходится в точке z_2 , то он расходится в любой точке z , удовлетворяющей условию $|z| > |z_2|$.

Из теоремы 35 $\Rightarrow \exists R > 0$ такое, что ряд $\sum a_nz^n$ сходится (абсолютно) при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

Число R называют **радиусом сходимости** ряда $\sum a_nz^n$, круг $|z| < R$ называют **кругом сходимости** ряда $\sum a_nz^n$.

Применяя признак Даламбера (Коши) к исследованию ряда $\sum |a_n z^n|$ находим:

$$R = \frac{1}{\ell}, \text{ где } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{или} \quad \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Замечания -

1) Формулы для нахождения радиуса сходимости справедливы, если ряд $\sum a_n z^n$ – «полный» (т.е. присутствуют все степени z).

2) Допускается $R = 0$ (ряд сходится только в точке 0) и $R = +\infty$ (ряд сходится на всей комплексной плоскости).

3) Для ряда $\sum a_n(z - z_0)^n$ круг сходимости имеет вид:
 $|z - z_0| < R$.

Если ряд $\sum a_n(z - z_0)^n$ – «полный», то формулы для нахождения радиуса сходимости для него тоже справедливы.

СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

1) Степенной ряд сходится равномерно в любом замкнутом круге, целиком лежащем в круге сходимости.

2) Сумма степенного ряда является функцией аналитической.

3) Степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз. Получающиеся при этом ряды будут иметь тот же радиус сходимости, что и исходный.

4) Степенной ряд можно почленно интегрировать по любой кривой, лежащей в его круге сходимости.

2.1.4 Разложение функций комплексного переменного в степенной ряд

Напомним: говорят, что функция $f(x)$ разложима в ряд, если $\exists$ функциональный ряд $\sum f_n(x)$, суммой которого является $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. Пусть $f(z)$ – аналитическая в окрестности точки z_0 . **Рядом Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 (по степеням $z - z_0$)** называется степенной ряд вида

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

ТЕОРЕМА 36 (о разложении фкп в степенной ряд) - Если функция

$f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$, то она разлагается в этом круге в степенной ряд, причем этот ряд – ее ряд Тейлора, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \forall z \in G = \{ |z - z_0| < R \}$$

Если $z_0 = 0$, получаем ряд

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad \forall z \in G = \{ |z| < R \}.$$

Этот ряд называют *рядом Маклорена*.

Разложения, полученные ранее для функций

$$e^x, \sin x, \cos x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \ln(1+x), \frac{1}{1+x}, \frac{1}{1-x}$$

остаются справедливыми и в комплексном случае.

ПРИМЕРЫ разложения в ряд Маклорена некоторых функций:

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots; \\ \operatorname{Sinz} &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots; \\ \operatorname{Cos} z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \\ \frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \end{aligned}$$

2.1.5 Ряды Лорана

Если в точке z_0 функция $f(z)$ неаналитична, то для изучения поведения функции в окрестности этой точки ряды Тейлора не применимы. Рассмотрим обобщения степенных рядов, когда допускаются не только целые положительные степени, но и отрицательные. Такие ряды применяются для изучения функций в окрестности ее точек неаналитичности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

называется **рядом Лорана** (по степеням $z - z_0$, в окрестности точки z_0).

Ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ называется **правильной частью ряда Лорана**,

Ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ называется *главной*

частью ряда Лорана.

Таким образом, ряд Лорана сходится в кольце $r < |z - z_0| < R$,

$$\text{где } R = \frac{1}{\ell}, \quad \left. \begin{array}{ll} \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| & \text{или } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \\ r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| & \text{или } r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2.1)$$

Замечания -

1) Формулы (2.1) справедливы, если ряд Лорана – «полный» (т.е. присутствуют все степени $z - z_0$).

2) Допускается $r = 0$ (ряд сходится в проколотой окрестности точки z_0) и $R = +\infty$ (ряд сходится во внешности круга $|z - z_0| > r$).

3) Если $r \geq R$, то ряд Лорана расходится на всей комплексной плоскости.

Из свойств функциональных рядов следует следующий результат.

ТЕОРЕМА 37 (о сумме ряда Лорана) -

Сумма ряда Лорана аналитична в кольце его сходимости.

ТЕОРЕМА 38 (о разложении функции в ряд Лорана) - *Всякая функция*

$f(z)$, аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$, может быть представлена в этом кольце в виде суммы ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{n+1}},$$

C – любая окружность с центром в точке z_0 , лежащая в кольце

$$r < |z - z_0| < R.$$

Ряд Лорана, о котором идет речь в теореме 38, называется **рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0** (по степеням $z - z_0$).

ТЕОРЕМА 39 (единственности) - Если ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

сходится к функции $f(z)$ в кольце $r < |z - z_0| < R$, то

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{n+1}},$$

где C – любая окружность с центром в точке z_0 , лежащая в этом кольце.

2.2 Особые точки

2.2.1 Изолированные особые точки

Напомним, что точка z_0 , в которой функция $f(z)$ не является аналитической, называется **особой точкой функции $f(z)$** .

Точку, не являющуюся особой для $f(z)$, называют **правильной точкой функции $f(z)$** .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. Точка z_0 называется **изолированной особой точкой функции $f(z)$** , если в некоторой ее окрестности нет других особых точек функции $f(z)$.

Изолированная особая точка z_0 называется

а) **устранимой особой точкой**, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$, где $c \in \mathbb{C}$;

б) **полюсом**, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$,

в) **существенно особой точкой**, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует.

Замечание - Устранимую особую точку можно «устранить», доопределив (переопределив) функцию $f(z)$ равенством

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c.$$

Новая функция в точке z_0 будет аналитической.

ВЗАИМОСВЯЗЬ ХАРАКТЕРА ОСОБОЙ ТОЧКИ С ВИДОМ РЯДА ЛОРАНА ФУНКЦИИ В ЕЕ ОКРЕСТНОСТИ

1) Устранимые особые точки

ТЕОРЕМА 40 (вид ряда Лорана функции в окрестности ее устранимой особой точки) -Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является устранимой $\Leftrightarrow$ ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 не содержит главной части, т.е. имеет вид

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots + a_n (z - z_0)^n + \dots$$

2) Полюсы

Точка z_0 называется **нулем функции $\varphi(z)$** , если $\varphi(z_0) = 0$.

Точка z_0 называется **нулем кратности m** , если

$$\varphi(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z), \text{ где } g(z_0) \neq 0.$$

Нуль кратности 1 называется **простым**.

ТЕОРЕМА 41 (связь полюсов и нулей функций) - Точка z_0 является нулем аналитической функции $\varphi(z) \Leftrightarrow z_0$ – полюс функции

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. Кратность нуля z_0 аналитической функции $\varphi(z)$ называют **кратностью (порядком) полюса z_0 функции**

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}.$$

Полюс кратности 1 называют **простым**.

ТЕОРЕМА 42 (вид ряда Тейлора функции в окрестности нуля) - Точка z_0 является нулем кратности m аналитической функции $\varphi(z) \Leftrightarrow$ ряд Тейлора функции $\varphi(z)$ в окрестности точки z_0 не содержит первых m членов, т.е. имеет вид

$$\sum_{n=m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_m (z - z_0)^m + a_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots$$

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 42 (связь кратности нуля с производными функции) -

Точка z_0 является нулем кратности m аналитической функции $\varphi(z) \Leftrightarrow$

$$\varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = \varphi''(z_0) = \dots = \varphi^{(m-1)}(z_0) = 0, \\ \varphi^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 43 (вид ряда Лорана функции в окрестности ее полюса) -
Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом кратности $m \Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит только m членов, т.е. имеет вид

$$\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 43 (вид функции, имеющей полюс в точке z_0) - Точка z_0 является полюсом кратности m функции $f(z) \Leftrightarrow$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m},$$

где $g(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $g(z_0) \neq 0$.

Важной характеристикой «полюса» является его порядок или кратность.

Пусть точка $z = z_0$ является полюсом функции

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Возможны два случая:

- 1) если в точке $z = z_0$ $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, то порядок полюса равен *порядку нуля функции $\psi(z_0)$ в точке z_0* ;
- 2) если в точке $z = z_0$ $\varphi(z_0) = 0$, $\psi(z_0) = 0$, то порядок полюса равен *разности порядков нулей числителя и знаменателя*.

Таким образом, для определения порядка полюса функции необходимо определить порядок нулей ее числителя и знаменателя в точке z_0 .

Замечание - В случае полюса порядок нуля знаменателя должен быть больше порядка того же нуля числителя. Если порядок нуля числителя окажется равным или больше порядка того же нуля знаменателя, то особая точка будет являться устранимой особой точкой.

3) Существенно особые точки

ТЕОРЕМА 44 (вид ряда Лорана функции в окрестности ее существенно особой точки) - *Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является существенно особой $\Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит бесконечное число членов.*

2.2.2 Характер точки ∞

Говорят, что функция $f(z)$ *аналитична в окрестности точки ∞* , если она аналитична в области $|z| > R$ (где R – некоторое число).

Точка ∞ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$ если $f(z)$ не имеет особых точек в области $|z| > R$ (где R – некоторое число).

Изолированная особая точка ∞ называется

а) *устранимой особой точкой*, если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = c$, где $c \in \mathbb{C}$;

б) *полюсом*, если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$,

в) *существенно особой точкой*, если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \nexists$.

Говорят, что функция $f(z)$ *разложима в ряд Лорана в окрестности точки ∞* , если она разложима в ряд Лорана по степеням z в кольце $R < |z| < +\infty$, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n, \quad R < |z| < +\infty$$

При этом ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$$

называют *правильной частью ряда Лорана функции в окрестности ∞* , ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$

называют *главной частью ряда Лорана функции в окрестности ∞* .

Для точки ∞ справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 45 (вид ряда Лорана функции в окрестности ее изолированной особой точки ∞) - *Изолированная особая точка ∞ функции $f(z)$ является*

а) устранимой $\Leftrightarrow$ ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки ∞ не содержит главной части, т.е. имеет вид

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n},$$

б) полюсом кратности $m \Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки ∞ содержит только m членов, т.е. имеет вид

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m,$$

в) существенно особой $\Leftrightarrow$ главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки ∞ содержит бесконечное число членов.

2.3 Вычеты. Основная теорема о вычетах

2.3.1 Вычет относительно конечной точки

Пусть точка z_0 является изолированной особой точкой функции $f(z)$. Окружим эту точку произвольным контуром C таким, чтобы внутри него располагалась лишь точка z_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. *Вычетом* функции $f(z)$ относительно конечной точки z_0 называется интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz,$$

где C – любой контур, удовлетворяющий условиям:

а) z_0 лежит в области D , внутренней по отношению к C (т.е. в области, которая остается слева при обходе контура C против часовой стрелки);

б) в области D и на ее границе C нет особых точек функции $f(z)$, за исключением может быть точки z_0 .

Обозначают:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z).$$

Из определения следует, что если z_0 – правильная, то $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

ТЕОРЕМА 46 (связь вычета функции относительно $z_0 \in \mathbb{C}$ с коэффициентами ее ряда Лорана в окрестности z_0) -

Вычет функции $f(z)$ относительно $z_0 \in \mathbb{C}$ равен коэффициенту a_{-1} разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ в области

$0 < |z - z_0| < R$ (где R – такое число, что в области $0 < |z - z_0| < R$ функция $f(z)$ – аналитическая).

Если z_0 – устранимая особая точка, то $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

ТЕОРЕМА 47 (вычисление вычета относительно полюса $z_0 \in \mathbb{C}$) –

Если $z_0 \in \mathbb{C}$ – полюс кратности m функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m \cdot f(z)].$$

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 47 (1-я формула для вычисления вычета относительно простого полюса $z_0 \in \mathbb{C}$) – Если $z_0 \in \mathbb{C}$ – простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) \cdot f(z)].$$

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 47 (2-я формула для вычисления вычета относительно простого полюса $z_0 \in \mathbb{C}$) – Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ – простой полюс

функции $f(z)$ и $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0$.

Тогда

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Напомним, что изолированная особая точка z_0 называется *существенно особой точкой*, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq \exists$.

Характерным признаком такой точки служит наличие бесконечно большого числа слагаемых в главной части ряда Лорана функции в окрестности этой точки.

Для определения вычета в существенно особой точке необходимо построить ряд Лорана функции и выписать из него значение коэффициента a_{-1} , которое и является значением вычета. Другого способа определения вычета в данной ситуации нет.

2.3.2 Вычет относительно ∞

Пусть ∞ – изолированная особая точка функции $f(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. *Вычетом функции $f(z)$ относительно ∞ называется число, равное*

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz,$$

где C – любой контур, такой, что в области, внешней по отношению к C , нет конечных особых точек функции $f(z)$.

Обозначают: $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$.

ТЕОРЕМА 48 (связь вычета функции относительно ∞ с коэффициентами ее ряда Лорана в окрестности ∞) - *Вычет функции $f(z)$ относительно ∞ равен $-1 \cdot a_{-1}$, где a_{-1} – коэффициент при z^{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ∞ (т.е. в области $|z| > R$).*

ТЕОРЕМА 49 (вычисление вычета относительно устранимой особой точки ∞) - *Если ∞ – устранимая особая точка функции $f(z)$, то*

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^2 \cdot f'(z)].$$

ТЕОРЕМА 50 (вычисление вычета относительно полюса ∞) – *Если ∞ – полюс кратности m функции $f(z)$, то*

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} [z^{m+2} \cdot f^{(m+1)}(z)].$$

Замечание - Вычисление вычета относительно ∞ можно свести к вычислению вычета относительно $z_0 = 0$ если сделать замену $z = \frac{1}{t}$.

2.3.3 Основная теорема о вычетах

ТЕОРЕМА 51 (основная теорема о вычетах) - *Пусть*

а) *функция $f(z)$ аналитична в ограниченной односвязной области D за исключением конечного числа изолированных особых точек*

$z_1, z_2, \dots, z_n$;

б) C – замкнутый контур в D , внутри которого содержатся точки $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Тогда

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 21 - Пусть функция $f(z)$ аналитична в ограниченной односвязной области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$. Тогда сумма всех вычетов функции $f(z)$ относительно ее особых точек, включая вычет относительно ∞ , равна нулю, т.е.

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

2.4 Применение вычетов при вычислении интегралов

а) Вычисление контурных интегралов

ПРИМЕР 10. Найти

$$\oint_{|z|=5} \frac{\sin 4z dz}{(z-2)^2(z-3)(z-6)}$$

Решение – По основной теореме о вычетах имеем:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=5} \frac{\sin 4z dz}{(z-2)^2(z-3)(z-6)} &= \oint_{|z|=5} f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=2} f(z) + \operatorname{res}_{z=3} f(z) \right) = \\ &= 2\pi i \left(\lim_{z \rightarrow 2} \left((z-2)^2 \frac{\sin 4z}{(z-2)^2(z-3)(z-6)} \right)' + \right. \\ &\quad \left. + \lim_{z \rightarrow 3} \frac{\sin 4z}{(z-2)^2(z-3)(z-6)} \cdot (z-3) \right) = \\ &= 2\pi i \left(\lim_{z \rightarrow 2} \frac{4 \cos 4z(z^2 - 9z + 18) - (2z - 9) \sin 4z}{(z^2 - 9z + 18)^2} + \frac{\sin 12}{-3} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{4 \cos 8 \cdot 4 + 5 \sin 8}{16} - \frac{\sin 12}{3} \right) = 2\pi i \left(\cos 8 + \frac{5}{16} \sin 8 - \frac{\sin 12}{3} \right). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 11. Найти

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=3} \frac{z^{15} dz}{z^8 + 2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=3} f(z) dz$$

Решение – Согласно следствию основной теоремы о вычетах имеем:

$$I = -\operatorname{res}_{z=\infty} f(z).$$

Так как $f(z) = \frac{z^{15}}{z^8+2} = \frac{z^{15}}{z^8(1+\frac{2}{z^8})} = z^7 \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z^8}} = z^7 \left(1 - \frac{2}{z^8} + \frac{4}{z^{16}} - \dots\right)$ при $|z| > \sqrt[8]{2}$,

то $-a_{-1} = \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 2 \Rightarrow I = -2$.

Замечание – Если в этом примере не использовать понятие вычета в ∞ , то пришлось бы вычислять восемь вычетов в точках $z_m = \sqrt[8]{2}$.

б) Вычисление интегралов типа

$$\int_a^{a+2\pi} R(\cos x, \sin x) dx.$$

Имеем: $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Замена: $z = e^{ix}$.

Тогда $dz = ie^{ix} dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{ie^{ix}} \cdot \frac{i}{i} = -\frac{idz}{z}$, $\cos x = \frac{z^2+1}{2z}$, $\sin x = \frac{z^2-1}{2zi}$.

Получим

$$\int_a^{a+2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \oint_{|z|=1} -\frac{i}{z} \cdot R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2zi}\right) dz$$

ПРИМЕР 12. Найти

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5 + 3 \sin x}.$$

Решение -

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5 + 3 \sin x} = \oint_{|z|=1} \frac{-i}{z} \cdot \frac{dz}{5 + 3 \cdot \frac{z^2-1}{2zi}} =$$

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{aligned}
f(z) &= \frac{-i}{z} \cdot \frac{1}{5 + 3 \cdot \frac{z^2 - 1}{2zi}} = \frac{-i}{z} \cdot \frac{1}{\frac{10iz + 3z^2 - 3}{2zi}} = \\
&= \frac{-2i \cdot i}{3z^2 + 10iz - 3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z^2 + \frac{10i}{3}z - 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(z + 3i) \left(z + \frac{1}{3}i \right)} = \\
&\text{внутри контура интегрирования попадает одна особая точка} \\
&\quad z = -\frac{1}{3}i - \text{простой полюс} \\
&= \frac{2}{3} \cdot 2\pi i \operatorname{res}_{z=-\frac{1}{3}i} \frac{1}{(z + 3i) \left(z + \frac{1}{3}i \right)} = \\
&= \frac{2}{3} \cdot 2\pi i \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{3}i} \frac{1}{(z + 3i) \left(z + \frac{1}{3}i \right)} \cdot \left(z + \frac{1}{3}i \right) = \frac{2}{3} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{-\frac{1}{3}i + 3i} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned} \right| =
\end{aligned}$$

в) Вычисление интегралов типа

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} dx$$

(где $m \geq n + 2$, $P_m(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

ТЕОРЕМА 52 - Пусть

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)},$$

где $P_n(x)$, $P_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно, причем $m \geq n + 2$, $P_m(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=z_k} f(z)$$

где $z_1, z_2, \dots, z_m$ – особые точки $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости (т.е. $\operatorname{Im} z_k > 0$).

ПРИМЕР 13. Найти

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx$$

Решение -

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx &= 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=i} f(z) + \operatorname{res}_{z=3i} f(z) \right) = \\ &= 2\pi i \left(\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z^2+9)} \cdot (z-i) + \right. \\ &\quad \left. + \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{z^2}{(z-3i)(z+3i)(z^2+1)} \cdot (z-3i) \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{i^2}{2i(i^2+9)} + \frac{9i^2}{(9i^2+1)6i} \right) = 2\pi i \left(\frac{-1}{2i \cdot 8} - \frac{9}{-8 \cdot 6i} \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2) Вычисление интегралов типа

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx$$

ЛЕММА 53 (Жордана) - Пусть имеется семейство дуг полуокружностей

$$C_R : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0 \quad (\text{где } R \rightarrow +\infty)$$

Обозначим

$$M(R) = \max_{z \in C_R} |f(z)|.$$

Если $f(z)$ аналитическая в верхней полуплоскости за исключением конечного числа особых точек и

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} M(R) = 0,$$

то

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} e^{i\lambda z} f(z) dz = 0,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$.

ТЕОРЕМА 54 - Пусть 1) $f(z)$ аналитична на вещественной оси

2) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости за исключением особых точек $z_1, z_2, \dots, z_m$;

3) $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана.

Тогда для любого $\lambda > 0$ интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \cdot f(x) dx$$

сходится и

$$J = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=z_k} e^{i\lambda z} \cdot f(z),$$

где $z_1, z_2, \dots, z_m$ – особые точки $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости (т.е. $\operatorname{Im} z_k > 0$).

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 54 - Пусть $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 54. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx = \operatorname{Re} \left(2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=z_k} e^{i\lambda z} \cdot f(z) \right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx = \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=z_k} e^{i\lambda z} \cdot f(z) \right),$$

где $z_1, z_2, \dots, z_m$ – особые точки $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости (т.е. $\operatorname{Im} z_k > 0$).

ПРИМЕР 14. Найти

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 2x + 10}.$$

Решение – Сходимость данного интеграла следует из признака сравнения, так как $\left| \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 10} \right| \leq \left| \frac{1}{x^2 + 2x + 10} \right|$, а интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$ сходится. Условия леммы Жордана для функции $F(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 10}$, очевидно, выполнены. Согласно следствию теоремы 54, имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 2x + 10} = \operatorname{Re} \left(2\pi i \operatorname{res}_{z=-1+3i} \frac{e^{iz}}{(z - (-1 + 3i))(z - (-1 - 3i))} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \left(2\pi i \operatorname{res}_{z=-1+3i} \frac{e^{iz}}{(z+1-3i)(z+1+3i)} \right) = \\
&= \operatorname{Re} \left(2\pi i \lim_{z \rightarrow -1+3i} \frac{e^{iz}}{z+1+3i} \right) = \operatorname{Re} \left(2\pi i \cdot \frac{e^{-3-i}}{6i} \right) = \\
&= \frac{\pi}{3} e^{-3} \operatorname{Re}(e^{-i}) = \frac{\pi}{3} e^{-3} \cos 1.
\end{aligned}$$

Рекомендуемая литература

- 1) Ганичева А. В. Основы теории функции комплексной переменной. Операционное исчисление / Ганичева А. В. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 148 с. — Книга из коллекции Лань - Математика .— ISBN 978-5-8114-7271-0 .— <URL:<https://e.lanbook.com/book/173082>>
- 2) Краснов М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учебное пособие для вузов / М. Л. Краснов. А. И. Киселев, Г. И. Макаренко - М.: Наука, 1971 – 254 с.
- 3) Магазинников Л. И. Высшая математика III. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования: Учебное пособие/ Магазинников Л. И. — Томск: ТУСУР, 2012. — 206 с. — Режим доступа: URL: <https://math.tusur.ru/book/vm3.pdf>
- 4) Малышева, Н. Б. Функции комплексного переменного / Малышева Н. Б., Розендорн Э. Р.; Розендорн Э.Р. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010 .— 168 с. — Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений. — Книга из коллекции ФИЗМАТЛИТ - Математика .— ISBN 978-5-9221-0977-2 .— URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=2257
- 5) Терехина Л.И. Высшая математика: учебное пособие / Л. И. Терехина, И. И. Фикс. — Томск: Дельтаплан, 2007.- Ч. 4: Дифференциальные уравнения. Ряды. Функции комплексного переменного. Операционный метод.— 2007 .— 264 с.

Учебное электронное издание

Инна Леонтьевна Фаустова
Елена Григорьевна Пахомова

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Учебное пособие

Научный редактор:

Технический редактор:

Редактор: М. В. Ворожейкина

Выходит в авторской редакции