

СТИ

НИЯУ МИФИ

Северский
технологический
институт



ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ЧАСТЬ 2

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

И. Л. Фаустова

Северск
2026

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Северский технологический институт –
филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего
образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(СТИ НИЯУ МИФИ)

И.Л. Фаустова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ЧАСТЬ 2

Учебное пособие

по курсу «Высшая математика»
для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавриат
13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»,
15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»,
18.03.02 «Энерго - и ресурсосберегающие процессы
в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии»,
38.03.01 «Экономика»

Северск 2026

УДК 51 (075.8)

ББК 22.1я73

Ф 288

Автор:

Фаустова И. Л. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
«Высшая математика и информационные технологии» СТИ
НИЯУ МИФИ;

Рецензент:

Брендаков В.Н. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры
«Высшая математика и информационные технологии» СТИ
НИЯУ МИФИ

Фаустова И.Л.

Ф 288 Высшая математика: учебное пособие в трех частях/ И. Л. Фаустова,
Северский технологический институт НИЯУ МИФИ – Северск:
Издательство СТИ НИЯУ МИФИ, 2026. – Текст: электронный.
Часть 2. – 68 с.

Данное учебное пособие содержит теоретический и практический материал по математическому анализу, включая такие разделы, как «Предел функции», «Производная функции одной переменной», «Функции нескольких переменных» по курсу «Высшая математика» для 2 семестра. Учебное пособие нацелено на оказание помощи студентам при выполнении ими контрольных работ и подготовки к экзамену по данному курсу. Материал данного пособия позволяет выработать теоретические и практические навыки по курсу «Высшая математика», рассматриваемого во 2 семестре.

Учебное пособие предназначено для студентов второго курса СТИ НИЯУ МИФИ очно-заочной формы обучения по направлению подготовки 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 18.03.02 «Энерго - и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии», 38.03.01 «Экономика».

Одобрено на заседании кафедры Высшей математики и информационных технологий СТИ НИЯУ МИФИ и рекомендовано к изданию (протокол № 3 от «31» августа 2026 г.).

Рег. № 10/26 от 09.09.2026 г.

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ, Северский технологический институт- филиал ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (СТИ НИЯУ МИФИ), 2026

Содержание

ГЛАВА 1. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

- 1.1 Варианты контрольной работы 1 4
- 1.2 Методические указания к выполнению контрольной работы 1 20

ГЛАВА 2. Функции нескольких переменных

- 2.1 Варианты контрольной работы 2 32
- 2.2 Методические указания к выполнению контрольной работы 2 62

Рекомендуемая литература 67

ГЛАВА 1. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1.1 Варианты контрольной работы 1

Вариант 1

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 2x}{3x^2 + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^3 - 2x^2 - 9x + 4};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x - 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \ln \ln(3 - 2x^3);$$

$$8) \begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{-2t}; \end{cases}$$

$$7) y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1});$$

$$9) y = \sqrt[x]{x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$y = (4x - x^2)/4$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{12}{x^2 - 4};$$

$$12) y = x + \frac{\ln x}{x}.$$

Вариант 2

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - x^2 + 15}{2x^4 + 25};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^3 - 27};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 12} - 2}{\sqrt{x^2 - 7} - 3};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\sin^2 x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x-3} \right)^{x+2}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \ln \cos \frac{x-1}{x};$$

$$7) y = e^{2x} (2 - \sin 2x - \cos 2x) / 8;$$

$$8) \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t); \end{cases}$$

$$9) y = x^{\sqrt{x}}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 2x^2 + 3x - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = x - \ln x;$$

$$12) y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}.$$

Вариант 3

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 + 5}{x^2 - 4};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^3 + x - 4}{x^2 - 4x + 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{x^2 - 3}}{x^2 - 4};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2 \sin x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-1} \right)^{2x-1}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \operatorname{arctg}(\ln x) + \ln(\operatorname{arctg} x);$$

$$7) y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2};$$

$$8) \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t; \end{cases}$$

$$9) y = x^{\sin x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x - x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = x + \frac{4}{x+2};$$

$$12) y = x^2 \sqrt{x+1}.$$

Вариант 4

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 4x - 1}{8x^2 + 2x + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 - 5}{2x^4 + x^3 - 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 8x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{\frac{x^2-1}{3x}}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = x^2 \cdot 10^{2x};$$

$$7) y = \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1+2^x}{1-2^x};$$

$$8) \begin{cases} x = 2 \sin t - \sin 2t, \\ y = 2 \cos t + \cos 2t; \end{cases}$$

$$9) y = (\cos x)^{\sin x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2};$$

$$12) y = \ln(4 - x^2).$$

Вариант 5

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{1 - \sqrt{x-1}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 2x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{3x+1}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \arcsin(\ln x);$$

$$7) y = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1};$$

$$8) \begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 2 \sin^2 t; \end{cases}$$

$$9) y = x^{x^2}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x + \sqrt{x^3}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = 2 - \frac{1}{x^2};$$

$$12) y = x + 2 \operatorname{arccot} x.$$

Вариант 6

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{3x^3 + x^2 - 2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^4 - x^3 - 40}{x^2 - 4};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 8} - 1}{\sqrt{x^2 - 5} - 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin 4x}{\operatorname{tg} x - \sin x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{2x-1}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \ln(\operatorname{tg} x);$$

$$7) y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3};$$

$$8) \begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = e^{-3t}; \end{cases}$$

$$9) y = (\operatorname{arctg} x)^{(1/2) \ln \operatorname{arctg} x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = \sqrt[3]{x^2} - 20 \text{ в точке с абсциссой } x_0 = -8.$$

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{1 - x^3}{x^2};$$

$$12) y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

Вариант 7

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x^3 + 2x - 4};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{\sqrt{26 - x} - 5};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - x^2}{2 - x^2} \right)^{5x^2 + 1}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \ln(\cos 2x);$$

$$7) y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arctg} e^x;$$

$$8) \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t); \end{cases}$$

$$9) y = (\sin x)^{5e^x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 4.$$

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3};$$

$$12) y = (x^2 - 4x + 3)e^{x-1}.$$

Вариант 8

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 9x^2 + 14}{x^2 + x - 20};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 6}{5x^2 + 2x - 7};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 25};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \operatorname{tg} 2x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\frac{2x}{1-x}}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \operatorname{arctg} 2x + \ln x;$$

$$7) y = \frac{18e^{2x} + 27e^x + 11}{6(e^x + 1)^3};$$

$$8) \begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t; \end{cases}$$

$$9) y = (\ln x)^{3^x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 8\sqrt[4]{x} - 70$ в точке с абсциссой $x_0 = 16$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{x^3}{x^2 + 1};$$

$$12) y = \ln(x^2 - 1)^2.$$

Вариант 9

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 2x + 3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^3 - x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^3 - 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 2x - 1)x}{\sin^3 x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2x}}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = x \cdot 10^{3x};$$

$$8) \begin{cases} x = 3\sin t - \sin 3t, \\ y = 3\cos t + \cos 3t; \end{cases}$$

$$7) y = 2(\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x - 1}) / \ln 2;$$

$$9) y = (\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 2x^2 - 3x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{x^3}{2(x+1)^2};$$

$$12) y = 5xe^{-x}.$$

Вариант 10

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt[3]{x^3 + 2} + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{2x^3 - 3x + 10};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{\sqrt{x^2 + 8} - 3};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{2x^3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + x^2}{4 + x^2} \right)^{x^2 + 1}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \frac{1}{\ln^3 x};$$

$$7) y = 2(x - 2)\sqrt{1 + e^x};$$

$$8) \begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = t^3 - 3t + 1; \end{cases}$$

$$9) y = (x \sin x)^{8 \ln(x \sin x)}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = (x^2 - 3x + 6)/x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{10x}{(1 + x)^3};$$

$$12) y = \sqrt[3]{1 - x^3}.$$

Вариант 11

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 + 2}{5x^4 + x^3 - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 3x^2 - 28}{x^2 - 5x + 6};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{2 - \sqrt{x^2 + 4}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2 \sin 2x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 3} \right)^{\frac{x^2 + 1}{x}}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \arcsin(\cos x);$$

$$7) y = e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x) / (\alpha^2 + \beta^2);$$

$$8) \begin{cases} x = \frac{3t^2 + 1}{3t^3}, \\ y = \sin(t^3/3 + t); \end{cases}$$

$$9) y = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 64$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$$

$$12) y = \frac{e^x}{2x}.$$

Вариант 12

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^3 + x - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x^3 - 4x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{\frac{x^3}{x+1}}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \ln(\sin 3x);$$

$$7) y = e^{\alpha x} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) / (\alpha^2 + \beta^2);$$

$$8) \begin{cases} x = e^{4t}, \\ y = e^{-4t}; \end{cases}$$

$$9) y = (\sin x)^{5x/2}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = (x^3 + 2)/(x^3 - 2)$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{2x^2 + x + 1}{2(x+1)};$$

$$12) y = \sqrt{x} \ln x.$$

Вариант 13

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^4 + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 4x^2 - 3x - 3}{x^2 - 4x + 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sqrt{x + 4} - 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-2} \right)^{\frac{x+1}{2}}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \ln(\operatorname{tg} 6x);$$

$$7) y = e^{ax} \left[\frac{1}{2a} + \frac{a \cos 2bx + 2b + 2b \sin 2bx}{2(a^2 + 4b^2)} \right];$$

$$8) \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t); \end{cases}$$

$$9) y = 19^{x^{19}} x^{19}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 2x^2 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{4x^3 - x^4}{8};$$

$$12) y = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}.$$

Вариант 14

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x^2 - x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 6}{x^2 - 2x - 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 8} - 3};$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \arctg 3x + \ln 5x;$$

$$7) y = x + 1/(1 + e^x) - \ln(1 + e^x)$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = \frac{x^{29} + 6}{x^4 + 1} \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 1.$$

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x};$$

$$12) y = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} \right).$$

Вариант 15

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 2}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + 2x^3 - x - 4}{x^2 - 5x + 4};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} - 1}{x^3};$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = x^3 \cdot 10^{5x};$$

$$7) y = x - 3 \ln[(1 + e^{x/6}) \sqrt{1 + e^{x/3}}] - 3 \arctg e^{x/6}; \quad 9) y = x^{e^{\cos x}}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = 2x + 1/x \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 1.$$

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{x^3 - 12x - 2}{6};$$

$$12) y = \frac{1}{x^2 e^x}.$$

Вариант 16

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{x + x^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4x + 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{x - 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos 2x}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 3} \right)^{\frac{x+1}{2}}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \frac{1}{\ln^4 x};$$

$$7) y = x + \frac{8}{1 + e^{x/4}};$$

$$8) \begin{cases} x = t^4 + 4t + 1, \\ y = t^4 - 4t + 1; \end{cases}$$

$$9) y = x^{e^{\sin x}}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = -2(x^8 + 2)/(3(x^4 + 1))$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2};$$

$$12) y = 1 + e^{-x^2}.$$

Вариант 17

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 5}{x^2 + 2x - 3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^3 - 2x + 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x^2 - 16};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \operatorname{tg} 3x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 1} \right)^{\frac{3x+1}{2}}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \arcsin \sqrt{x};$$

$$8) \begin{cases} x = 4\cos^2 t, \\ y = 8\sin^2 t; \end{cases}$$

$$7) y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x};$$

$$9) y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1} \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 1.$$

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1};$$

$$12) y = x \ln x.$$

Вариант 18

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} + x}{x + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{3x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 5}{3x + 1} \right)^{x+1}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \ln(\cos 6x);$$

$$7) y = x - e^{-x} \arcsin e^x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}});$$

$$8) \begin{cases} x = e^{5t}, \\ y = e^{-5t}; \end{cases}$$

$$9) y = x^{29^x} \cdot 29^x.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2} \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 1.$$

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2};$$

$$12) y = xe^{\frac{1}{x}}.$$

Вариант 19

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{2x^4 - x + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{4x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3 \cos x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^x.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \arctg(\ln x);$$

$$8) \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t); \end{cases}$$

$$7) y = 2e^{-x/2} \arctg e^{x/2} - (\arctg e^{x/2})^3;$$

$$9) y = x^{e^x} x^9.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = 3(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}) \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 1.$$

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = 3\sqrt[3]{x} - x;$$

$$12) y = \arctg \frac{1}{x}.$$

Вариант 20

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 10}{x^2 - 5x + 6};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{\frac{x}{4}}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \arctg 5x + \ln 3x;$$

$$7) y = \frac{e^{x^3}}{1 + x^3};$$

$$8) \begin{cases} x = 5 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t; \end{cases}$$

$$9) y = x^{e^{\operatorname{tg} x}}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 1/(3x+2)$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \sqrt{9x^2 + 1};$$

$$12) y = x + \ln(x^2 - 1).$$

Вариант 21

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x+1)^3 + (x-2)^3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 2x^2 - 5}{x^2 - 3x + 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 - x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x+3} \right)^{\frac{x-1}{5}}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = x^4 \cdot 10^{2x};$$

$$7) y = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \arctg \left(e^{mx} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} \right);$$

$$8) \begin{cases} x = \sqrt{1-t^3}, \\ y = \operatorname{tg} \sqrt{1+t}; \end{cases}$$

$$9) y = (\sin x)^{7x/2}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x/(x^2+1)$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x};$$

$$12) y = \ln \left(x - \frac{1}{x} \right).$$

Вариант 22

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^4 + 2x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 2x^2 - x - 14};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x \operatorname{tg} 2x}{\sin 3x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+4x}{4x} \right)^{2x}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \frac{1}{\ln^5 x};$$

$$7) y = 3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2);$$

$$8) \begin{cases} x = t^5 + 5t + 1, \\ y = t^5 - 5t + 1; \end{cases}$$

$$9) y = (\sin x)^{e^x / 2}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = (x^3 - 3x + 3)/3$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = 5 \frac{x+1}{x^2};$$

$$12) y = x + e^{-x}.$$

Вариант 23

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x} \right)^{x-8}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \ln(\arcsin 5x);$$

$$7) y = \ln \frac{\sqrt{1+e^x + e^{2x}} - e^x - 1}{\sqrt{1+e^x + e^{2x}} - e^x + 1};$$

$$8) \begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 10 \sin^2 t; \end{cases}$$

$$9) y = (\cos x)^{e^x / 2}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 2x/(x^2+1)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = x - \operatorname{arctg} x;$$

$$12) y = \frac{e^{-x}}{2(x+1)}.$$

Вариант 24

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{7x^2 + 5};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x - 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{tg} 2x}{\sin 3x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + x^2}{2 + x^2} \right)^{\frac{x^3 + 1}{x}}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \operatorname{arctg}(\sin x) + \ln(\operatorname{arctg} x);$$

$$7) y = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right);$$

$$8) \begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = 1/\sqrt[3]{(t-1)^2}; \end{cases}$$

$$9) y = x^{\cos x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}) \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 1.$$

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1};$$

$$12) y = x \ln x + x.$$

Вариант 25

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x}{(x-1)^3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{3x^2 - 4x + 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sin x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} \right)^x.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \ln(\sin x);$$

$$7) y = \frac{e^x}{2} [(x^2 - 1) \cos x + (x - 1)^2 \sin x];$$

$$8) \begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t); \end{cases}$$

$$9) y = (\cos x)^{5e^x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2} \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 1.$$

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = 3 \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1};$$

$$12) y = x^2 \ln x.$$

Вариант 26

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 3}{x^2 - 3x + 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} \right)^{x^4}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = x \cdot 10^{5x};$$

$$7) y = \arctg(e^x - e^{-x});$$

$$8) \begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \\ y = t\sqrt{t^2 + 1}; \end{cases}$$

$$9) y = (\ln x)^{5x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2 \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 1.$$

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1};$$

$$12) y = \frac{5 \ln(1 - x)}{x - 1}.$$

Вариант 27

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2x^4}{\sqrt{x^2 + 1} + x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x - 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x + 3} - 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x \sin 2x}{6x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 3x^2}{2 + 3x^2} \right)^{x^2 + 2}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \arctg 7x + \ln(3x + 2);$$

$$7) y = -e^{3x} / (3 \operatorname{sh}^3 x);$$

$$8) \begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \arcsin(t - 1); \end{cases}$$

$$9) y = (\operatorname{tg} 3x)^{2e^x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x} \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 1.$$

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = x + \arctg x;$$

$$12) y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Вариант 28

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^3}{x^4 - 16};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{\sin x - \operatorname{tg} x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \arcsin \sqrt{1-x^2};$$

$$7) y = \arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}};$$

$$8) \begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t), \\ y = \ln t e^t; \end{cases}$$

$$9) y = (x^3 + 4)^{\operatorname{ctg} x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = (3x-2x^2)/3$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$12) y = \ln(1+e^{-x}).$$

Вариант 29

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 2)^2}{4 - x^4};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 21};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 5x;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = x - \ln(1+e^x);$$

$$7) y = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4 + 2x^2 + 2);$$

$$8) \begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = 1/\cos^2 t; \end{cases}$$

$$9) y = (\sin 3x)^{2e^x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^2/10+3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{x^4 + 27}{2x^3};$$

$$12) y = 3(x-1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}.$$

Вариант 30

Найти предел функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3-x)^3}{(x+1)^2 - 4x^3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{\sqrt{x^2 + 8} - 3};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{x^2};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x+1} \right)^{3x-2}.$$

Найти производные данных функций:

$$6) y = \frac{2^{x^3}}{1+x^3};$$

$$7) y = e^{x^2} / (1+x^2);$$

$$8) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^{t/2}, \\ y = \sqrt{e^t + 1}; \end{cases}$$

$$9) y = x^{e^x}.$$

10) Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = (x^3 - 2x - 3)/4$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$.

Исследовать функции и построить их графики:

$$11) y = \frac{x^3 - 9x}{5};$$

$$12) y = 1 - e^{-\frac{1}{x}}.$$

1.2 Методические указания к выполнению контрольной работы 1

Определение. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое малое положительное число δ , что для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Тот факт, что число A есть предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ записывается символически следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Приведем ряд теорем о пределах без доказательств, которые можно рассматривать как правила вычисления предела функции.

Теорема 1 (о пределе константы).

Если функция сохраняет постоянное значение для всех x , то есть

$$f(x) = C, (C = \text{const}),$$

то предел этой функции равен этой константе

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C.$$

Или говорят: предел константы равен самой константе.

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, тогда имеют место следующие теоремы:

а) Теорема 2 (о пределе суммы (разности) двух функций)

Предел суммы (разности) двух функций, имеющих предел, равен сумме (разности) пределов этих функций

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B.$$

б) Теорема 3 (о пределе произведения двух функций)

Предел произведения двух функций, имеющих предел, равен произведению пределов этих функций

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B.$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C \cdot A.$$

в) Теорема 4 (о пределе частного двух функций)

Предел отношения двух функций, имеющих предел, равен отношению пределов этих функций

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ причем } B \neq 0.$$

Отметим одно важное свойство, которое применяется при вычислении пределов: *к пределу можно переходить под знаком любой элементарной функции в области ее определения*, например:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x) &= \ln(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \sin f(x) &= \sin(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} e^{f(x)} &= e^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}. \end{aligned}$$

При вычислении пределов необходимо, прежде всего, в выражение, стоящее под знаком предела, вместо переменной подставить ее предельное значение. Возможны две ситуации:

1) в результате подстановки и проведения необходимых вычислений получилось определенное число или бесконечность, которые и являются ответом;

2) в результате подстановки предельного значения переменной получаются неопределенности, которых всего семь видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right), \quad \left(\frac{0}{0}\right), \quad (\infty - \infty), \quad (0 \cdot \infty), \quad (1^\infty), \quad (0^0), \quad (\infty^0).$$

Для получения результата необходимо раскрыть неопределенность.

При раскрытии неопределенности можно использовать первый и второй замечательные пределы, а также таблицу эквивалентных бесконечно малых величин.

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

Таблица эквивалентных бесконечно малых величин ($\alpha(x) \rightarrow 0$)

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	6. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
2. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	7. $\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \cdot \frac{1}{\ln a}$
3. $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	8. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
4. $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	9. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$
5. $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$	10. $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$

Напомним, что если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, то функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой величиной, а бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными, если предел их отношения равен единице, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Задача 1 - Найти предел функций:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3 + x^3}{x^3 + 2x^2 - x + 1};$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 6}{x^3 - x};$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x^2 - 12} - 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x^2}}{1 - \cos x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1} \right)^{2x}.$$

Решение:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3 + x^3}{x^3 + 2x^2 - x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3}{x^3} = 9;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 6}{x^3 - x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x^2 - 5x + 6)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{13}{2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x^2 - 12} - 2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16)(\sqrt{x^2 - 12} + 2)}{(\sqrt{x^2 - 12} - 2)(\sqrt{x^2 - 12} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16)(\sqrt{x^2 - 12} + 2)}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x^2 - 12} + 2) = 4;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x^2}}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \frac{\operatorname{arctg} \sqrt[3]{x^2} \sim \sqrt[3]{x^2}}{1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = \infty;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1} \right)^{2x} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{-3}{3x+1} \right)^{\frac{3x+1}{-3}} \right\}^{\frac{-3 \cdot 2x}{3x+1}} =$$

$$= \left| \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3x+1} \right)^{\frac{3x+1}{-3}} = e \right| = e^{-2}.$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 \cdot 2x}{3x+1} = -2 \right|$$

Техника дифференцирования основана на основных правилах и формулах дифференцирования.

Основные правила дифференцирования:

если C – константа, $U = U(x)$, $V = V(x)$ - дифференцируемые функции, то:

1) производная константы $\boxed{(C)' = 0};$

2) производная произведения константы на функцию

$$\boxed{(C \cdot U)' = C \cdot U'};$$

3) производная суммы (разности) функций

$$\boxed{(U \pm V)' = U' \pm V'};$$

4) производная произведения функций

$$\boxed{(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'};$$

5) производная частного функций

$$\boxed{\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}};$$

6) производная сложной функции $y = y(U(x))$

$$\boxed{y'(x) = y'(U) \cdot U'(x)};$$

7) производная обратной функции $x = x(y)$

$$\boxed{x'(y) = \frac{1}{y'(x)}};$$

8) производная функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

$$\boxed{y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}};$$

9) правило логарифмического дифференцирования

$$\boxed{y'(x) = y(x) \cdot (\ln y(x))'}.$$

Основные формулы дифференцирования:

$$1) (x^n)' = n \cdot x^{n-1};$$

$$2) (x)' = 1;$$

$$3) (\sin x)' = \cos x;$$

$$4) (\cos x)' = -\sin x;$$

$$5) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$6) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$7) (a^x)' = a^x \cdot \ln a;$$

$$8) (e^x)' = e^x;$$

$$9) (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$10) (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$11) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$12) (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Задача 2 - Найти производные данных функций:

$$1) y = \arcsin \sqrt{x} - \operatorname{arctg} x^3;$$

$$2) y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1});$$

$$3) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 3t, \\ y = \ln(1 + 9t^2) \end{cases};$$

$$4) y = (\sin x)^{\cos x}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} 1) (\arcsin \sqrt{x} - \operatorname{arctg} x^3)' &= (\arcsin \sqrt{x})' - (\operatorname{arctg} x^3)' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})' - \frac{1}{1+(x^3)^2} \cdot (x^3)' = \frac{1}{2\sqrt{x \cdot (1-x)}} - \frac{3x^2}{1+x^6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \left(\ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}) \right)' &= \frac{1}{e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}} \cdot (e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1})' = \\
&= \frac{1}{e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}} \cdot \left(2e^{2x} + \frac{1}{2\sqrt{e^{4x} - 1}} \cdot 4e^{4x} \right) = \frac{1}{e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}} \cdot 2e^{2x} \cdot \left(1 + \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} - 1}} \right) = \\
&= 2e^{2x} \cdot \frac{\sqrt{e^{4x} - 1} + e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} - 1}} \cdot \frac{1}{e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}} = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} - 1}}.
\end{aligned}$$

$$3) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 3t, \\ y = \ln(1 + 9t^2) \end{cases};$$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(\ln(1 + 9t^2))'}{(\operatorname{arctg} 3t)'} = \frac{\frac{1}{1 + 9t^2} \cdot (1 + 9t^2)'}{\frac{1}{1 + (3t)^2} \cdot (3t)'} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{18t}{1 + 9t^2}}{\frac{3}{1 + 9t^2}} = \frac{18t}{1 + 9t^2} \cdot \frac{1 + 9t^2}{3} = 6t.
\end{aligned}$$

$$4) y = (\sin x)^{\cos x}.$$

Логарифмируем исходную функцию:

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \cos x \cdot \ln(\sin x).$$

Дифференцируем обе части полученного уравнения почленно по x , учитывая, что y - сложная функция от x :

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\cos x)' \cdot \ln(\sin x) + (\ln(\sin x))' \cdot \cos x$$

или

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \cdot \cos x.$$

Решаем получившееся уравнение относительно y' и подставляя вместо функции y ее выражение из условия задачи, получим:

$$y = (\sin x)^{\cos x} (\operatorname{ctg} x \cdot \cos x - \sin x \cdot \ln(\sin x)).$$

Задача 3 - Составить уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = \frac{2}{1+x^2} \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 3.$$

Решение - Уравнение касательной: $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Находим $y_0 = y(x_0) = y(3) = \frac{2}{1+3^2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Затем – производную

функции и вычислим ее значение в точке $x_0 = 3$:

$$y' = \left(\frac{2}{1+x^2} \right)' = 2 \cdot \left(\frac{-1}{(1+x^2)^2} \right) \cdot (1+x^2)' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2},$$

$$y'(x_0) = y'(3) = -\frac{4 \cdot 3}{(1+3^2)^2} = -\frac{12}{100} = -\frac{3}{25}.$$

Подставляем найденные значения $y(3)$ и $y'(3)$ в уравнение касательной, получим, что

$$y - \frac{1}{5} = -\frac{3}{25} \cdot (x - 3).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем уравнение касательной

$$y = -\frac{3}{25}x + \frac{14}{25}.$$

Уравнение нормали имеет вид: $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$.

Подставляя найденные значения $y(3)$ и $y'(3)$, получаем уравнение нормали

$$y - \frac{1}{5} = \frac{25}{3} \cdot (x - 3) \text{ или } y = \frac{25}{3}x - \frac{124}{5}.$$

Задача 4 - Исследовать функцию и построить ее график.

Исследование функции является одним из важнейших приложений теории пределов, непрерывности функции и производных. Схема полного исследования функции содержит следующие этапы:

1) функция:

- область определения;
- четность, нечетность;
- периодичность;
- точки пересечения с осями координат;
- непрерывность;
- нахождение асимптот графика функции;

2) первая производная:

- найти первую производную;
- найти критические точки, оставить только те, которые принадлежат области определения функции;
- определить знак первой производной слева и справа от критических точек, отметить экстремумы, интервалы монотонности функции;

3) вторая производная:

- найти вторую производную;
- найти критические точки, оставить только те, которые принадлежат области определения функции;
- определить знак второй производной слева и справа от критических точек, указать интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба;

4) построить график функции.

Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \sqrt[3]{x(3 - x^2)}.$$

Решение -

1) Находим область определения функции:

$$D(y): x \in (-\infty; \infty).$$

Следовательно, нет вертикальных асимптот.

2) Исследуем свойства функции:

$$y(-x) = \sqrt[3]{-x(3 - x^2)} = -\sqrt[3]{x(3 - x^2)} = -y(x).$$

Следовательно, функция $y(x)$ является нечетной. График такой функции симметричен относительно начала координат. Поэтому достаточно провести исследование функции для $x \geq 0$.

3) Точки пересечения с осями координат:

если $x = 0, y = 0$. Следовательно, точка $(0, 0)$ – точка пересечения с осью Oy . Если $y = 0$, то $x(3 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$. Следовательно, $(0, 0), (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$ – точки пересечения с осью Ox .

4) Наклонные асимптоты: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x(3-x^2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x} = -1,$$

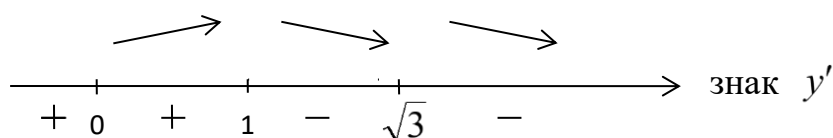
$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x(3-x^2)} + x) = \\ = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(3-x^2) + x^3}{x^{2/3}(3-x^2)^{2/3} - x\sqrt[3]{x(3-x^2)} + x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Вывод: функция имеет наклонную асимптоту $y = -x$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

$$5) y' = \left(\sqrt[3]{x(3-x^2)} \right)' = \frac{1}{3} (x \cdot (3-x^2))^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x - x^3)' = \frac{3(1-x^2)}{3\sqrt[3]{x^2 \cdot (3-x^2)^2}} = \\ = \frac{(1-x^2)}{\sqrt[3]{x^2 \cdot (3-x^2)^2}}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

y' не существует при $x = 0 \in D(y)$ и при $x = \pm\sqrt{3} \in D(y)$.



Вывод: в точке $x = 1$ - «гладкий» $\max$.

Значение функции в точке $\max$: $y(1) = \sqrt[3]{1(3-1)} \approx 1,26$.

В точках $x = 0, x = \sqrt{3}$ - экстремума нет.

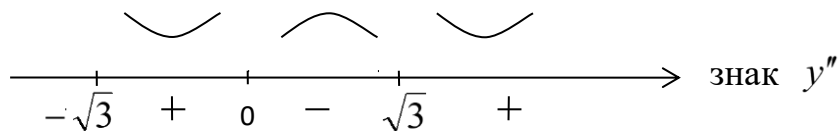
Функция возрастает в интервале $x \in (0, 1)$,

функция убывает в интервале $x \in (1, +\infty)$.

$$6) y'' = \left(\frac{(1-x^2)}{\sqrt[3]{x^2 \cdot (3-x^2)^2}} \right)' =$$

$$= \frac{(1-x^2)' \sqrt[3]{x^2 \cdot (3-x^2)^2} - (1-x^2) \left(\sqrt[3]{x^2 \cdot (3-x^2)^2} \right)'}{\sqrt[3]{x^4 \cdot (3-x^2)^4}} = \frac{-2(1+x^2)}{\sqrt[3]{x^5 \cdot (3-x^2)^5}}.$$

$y'' \neq 0$, y'' не существует при $x = 0 \in D(y)$ и $x = \pm\sqrt{3} \in D(y)$.



Вывод: $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ - точки перегиба.

Значение функции в точках перегиба: $y(0) = 0$, $y(\sqrt{3}) = 0$.

Функция выпукла в интервале $x \in (0, \sqrt{3})$,

функция вогнута в интервале $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$.

7) На основании проведенного исследования, учитывая, что график функции симметричен относительно начала координат, построим график данной функции (рисунок 1).

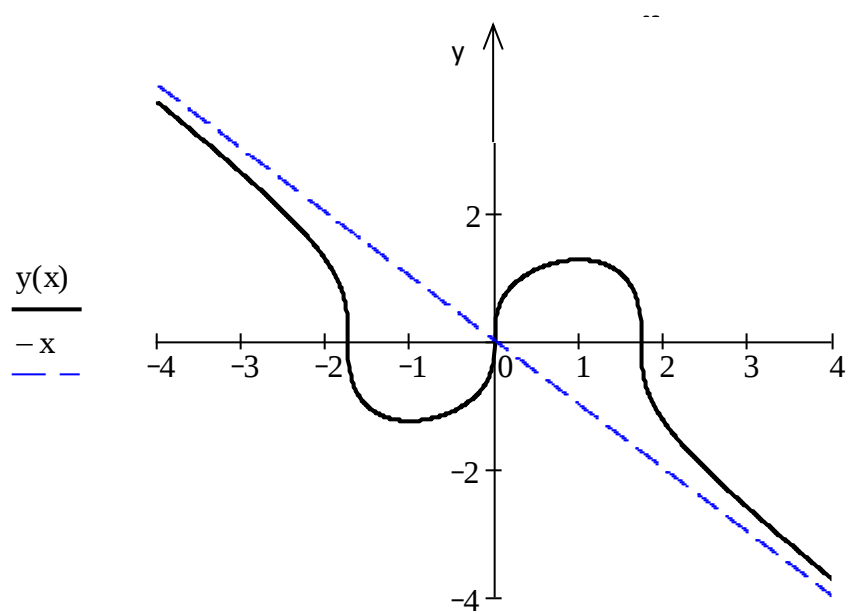


Рисунок 1 – График функции $y = \sqrt[3]{x(3-x^2)}$

ГЛАВА 2. Функции нескольких переменных

2.1 Варианты контрольной работы 2

Вариант 1

- 1) Найти частные производные функции

$$u = \ln(e^x + e^y).$$

- 2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \operatorname{arctg} xy, \quad x = \frac{u}{v^2}, \quad y = \frac{u^2}{v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

- 3) Найти полную производную сложной функции

$$z = xy \ln(x + y), \quad x = t^2 + 1, \quad y = \frac{1}{t^2}; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

- 4) Для функции $z = x^2 y^2 - xy^3 - 3y - 1$ найти:

а) производную в точке $M(2,1)$ в направлении от точки M к точке $O(0,0)$;

б) $\operatorname{grad} z$ в точке $N(2,2)$.

- 5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $y^2 - 2z^2 - x^2 = 1$ в точке $M(1,2,1)$.

- 6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

Вариант 2

1) Найти частные производные функции

$$u = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{y^2}{4x}}.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \frac{x+y}{x-y}, \quad x = u^2 v^2, \quad y = \frac{u^2}{v^2} - 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = x^2 y - y^3 x, \quad x = te^{-t}, \quad y = \frac{e^t}{e^t + 1}; \quad \frac{dz}{dt} = ?$$

4) Для функции $u = xyz$ найти:

а) производную в точке $M(5,1,2)$ в направлении от точки M к точке $N(0,1,1)$;

б) $\text{grad } u$ в точке $K(3,1,1)$.

5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ в точке $M(1,1,2)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = \frac{x^3}{3} + 2y^2 - x + y.$$

Вариант 3

- 1) Найти частные производные функции

$$u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \quad (a, b - \text{const}).$$

- 2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \arcsin \frac{x}{y}, \quad x = u + v, \quad y = u^2 + v^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

- 3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \sqrt{xy} + x, \quad x = \log_2 t, \quad y = 2^t; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

- 4) Для функции $z = (1 + \log_y x)^3$ найти:

а) производную в точке $M(e, e)$ в направлении от точки M к точке $N(3e, -2e)$;

б) $\text{grad } z$ в точке $K(1, 2)$.

- 5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1 \text{ в точке } M(1, 1, 2).$$

- 6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27.$$

Вариант 4

- 1) Найти частные производные функции

$$u = xe^y + ye^x.$$

- 2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad x = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}, \quad y = u + v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

- 3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad x = ctgt, \quad y = \cos t; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

- 4) Для функции $z = \ln(x + y)$ найти:

а) производную в точке $M(1,2)$ в направлении от точки M к точке $N(-3,6)$;

б) $\text{grad } z$ в точке $K(1,1)$.

- 5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^2 + y^2 + z^2 = 8$ в точке $M(1,-1,2)$.

- 6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2xy - y.$$

Вариант 5

1) Найти частные производные функции

$$u = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2} \quad (a - \text{const}).$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \frac{y}{x}, \quad x = u^v, \quad y = u^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \ln(x^2 + y^2), \quad x = \operatorname{tg} t, \quad y = \frac{1}{\sin t}; \quad \frac{dz}{dt} = ?$$

4) Для функции $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ найти:

а) производную в точке $M(-3, 1, 0)$ в направлении от точки M к точке $O(0, 0, 0)$;

б) $\operatorname{grad} u$ в точке $N(1, 2, 2)$.

5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $-3x^2 + y^2 + z^2 = 8$ в точке $M(0, -2, 2)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + y^2 - 3ax \quad (a > 0).$$

Вариант 6

1) Найти частные производные функции

$$u = x \sin \frac{x}{y}.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \ln \frac{x}{y}, \quad x = \ln(e + uv), \quad y = 1 + uv;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}, \quad x = \sqrt{t}, \quad y = \ln t; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

4) Для функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ найти:

а) производную в точке $M(3,5)$ в направлении от точки M к точке $N(6,5)$;

б) $\text{grad } z$ в точке $K(2,1)$.

5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$3x^2 + y^2 - 4z^2 = -12 \quad \text{в точке } M(1, -1, 2).$$

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = e^{2x}(x + y^2 + 2y).$$

Вариант 7

1) Найти частные производные функции

$$u = \cos xy^2.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \operatorname{tg}(x + y), \quad x = 2^{uv}, \quad y = u - v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = x^y, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \ln t; \quad \frac{dz}{dt} = ?$$

4) Для функции $u = xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2$ найти:

а) производную в точке $M(1,2,3)$ в направлении от точки M к точке $N(3,3,-1)$;

б) $\operatorname{grad} u$ в точке $K(1,0,1)$.

5) Найти уравнения касательной и нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 9$ в точке $M(1,-2,-2)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy^2 + 3axy \quad (a > 0).$$

Вариант 8

- 1) Найти частные производные функции

$$u = \sin(x^2 + xy).$$

- 2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \ln(2x + 3y), \quad x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

- 3) Найти полную производную сложной функции

$$z = e^{x-2y}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3; \quad \frac{dz}{dt} = ?$$

- 4) Для функции $u = xy^2 + z^3 + xyz$ найти:

а) производную в точке $M(1,1,1)$ в направлении, образующим с осями координат углы 60° , 45° и 60° соответственно;

б) $\text{grad } u$ в точке $N(2,1,1)$.

- 5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$ в точке $M_0(-1,1,1)$.

- 6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + y^2 + 2x + 4y.$$

Вариант 9

1) Найти частные производные функции

$$u = xy^2 + \sin \frac{x}{y}.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = 2^{\frac{x}{y}}, \quad x = 3u - 4v, \quad y = 2uv;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \sin xy, \quad x = t^2, \quad y = e^{-t}; \quad \frac{dz}{dt} = ?$$

4) Для функции $z = \operatorname{arctg}(xy)$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла;

б) $\operatorname{grad} z$ в точке $N(1,0)$.

5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 + 2y^2 - z^2 = 2 \quad \text{в точке } M(1,1,1).$$

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y.$$

Вариант 10

1) Найти частные производные функции

$$u = x^2 e^{\frac{y}{x}}.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = 2x - y^2, \quad x = \ln(u + v), \quad y = \ln u + \ln v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \sqrt[3]{y+1}, \quad x = 3t + 1, \quad y = \ln t; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

4) Для функции $z = 3x^4 - xy + y^3$ найти:

а) производную в точке $M(1,2)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол в 60° , а с осью Oy – тупой угол;

б) $\text{grad } z$ в точке $N(2,1)$.

5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $y^2 - 2z^2 + x^2 = 3$ в точке $M(-2,1,1)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

Вариант 11

1) Найти частные производные функции

$$u = x \cdot 2^{\frac{x}{y}}.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \frac{1}{\sin xy}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{u+1}}, \quad y = \frac{v}{u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}, \quad x = (t-1)^2, \quad y = 4^{tgt}; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

4) Для функции $z = \ln(e^x + e^y)$ найти:

а) производную в точке $O(0,0)$ в направлении вектора $\bar{e} = \{-3, 4\}$;

б) $\text{grad } z$ в точке $N(1,1)$.

5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$2x^2 - y^2 + z^2 = 2 \text{ в точке } M(1,1,1).$$

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4.$$

Вариант 12

1) Найти частные производные функции

$$u = \ln \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (a - \text{const}).$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \sqrt{u} + v, \quad y = uv;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \arcsin \frac{y}{x}, \quad x = 3^{-t}, \quad y = t^3; \quad \frac{dz}{dt} = ?$$

4) Для функции $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ найти:

а) производную в точке $O(0,0,0)$ в направлении вектора $\vec{e} = \{1, -2, 3\}$;

б) $\text{grad } u$ в точке $O(0,0,0)$.

5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 9 \quad \text{в точке } M(1,0,2).$$

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = xy - x^2y - xy^2.$$

Вариант 13

1) Найти частные производные функции

$$u = \ln(x + e^y).$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = y^x, \quad x = 3u^2 + 1, \quad y = u^3 + v^3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = e^{x^2 y}, \quad x = \lg t, \quad y = \frac{1}{t^3}; \quad \frac{dz}{dt} = ?$$

4) Для функции $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ найти:

а) производную в точке $M(1,2)$ в направлении от точки M к точке $N(2,0)$;

б) $\text{grad } z$ в точке $K(2,2)$.

5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 10y + 2z^2 = 2$ в точке $M(2,1,2)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = 6x^3 y^2 - x^4 y^2 - x^3 y^3.$$

Вариант 14

1) Найти частные производные функции

$$u = ye^{\frac{y}{x}}.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \left(\frac{x}{y}\right)^2, \quad x = \sin(2u + v), \quad y = \cos(u + 2v);$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = 2^{\frac{x}{y}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{t}; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

4) Для функции $z = \sin(x^2 + y^2)$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении от точки M к точке $N(3,7)$;

б) $\operatorname{grad} z$ в точке $K\left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$.

5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ в точке $M(1, 1, 3)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Вариант 15

1) Найти частные производные функции

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y}.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = x^3 + y, \quad x = e^{u-v}, \quad y = e^{u+v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \frac{x}{y^2}, \quad x = \cos \frac{1}{t}, \quad y = \frac{1}{\cos t}; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

4) Для функции $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении от точки M к точке $N(2,2)$;

б) $\text{grad } z$ в точке $K(3,4)$.

5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 + 2y^2 - z^2 + 1 = 0 \text{ в точке } M(1,1,2)$$

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5.$$

Вариант 16

1) Найти частные производные функции

$$u = \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = y^{2x}, \quad x = u \cdot v, \quad y = \frac{v}{u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \operatorname{arctg} \frac{1}{xy}, \quad x = \sqrt[3]{t}, \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

4) Для функции $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ найти:

а) производную в точке $M(3,4)$ в направлении радиус-вектора точки M ;

б) $\operatorname{grad} z$ в точке $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 2z = 2$ в точке $M(-2,3,0)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2x^2 + xy^2 - 16x.$$

Вариант 17

1) Найти частные производные функции

$$u = \sqrt[3]{x^3 + y^2}.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \frac{x}{y}, \quad x = u^2 + v^2, \quad y = u \cdot v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \sin \frac{x}{\sqrt{y}}, \quad x = 3t^2, \quad y = \sqrt{t^2 + 1}; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

4) Для функции $z = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ найти:

а) производную в точке $O(0,0)$ в направлении от точки M к точке $N(3,4)$;

б) $\text{grad } z$ в точке $O(0,0)$.

5) Найти уравнения касательной и нормали к поверхности $2x^2 - 2y^2 + 7z^2 = -3$ в точке $M(4,7,3)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2 + (x - y)^2 + (y - 1)^4.$$

Вариант 18

1) Найти частные производные функции

$$u = e^x (x \cos y - y \sin y).$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = x^2 + y^3, \quad x = 2u + 4v^3, \quad y = 3u^2 + v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = e^{x-2y}, \quad x = \sin^2 t, \quad y = t^3; \quad \frac{dz}{dt} = ?$$

4) Для функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ найти:

а) производную в точке $M(1,3)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{1, -2\}$;

б) $\text{grad } z$ в точке $N(1,0)$.

5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$2x^2 - 2y^2 - z^2 = 2 \quad \text{в точке } M(-2, 1, 2).$$

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 - xy + y^2 - x.$$

Вариант 19

1) Найти частные производные функции

$$u = y \cos \frac{2x}{y}.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = x^3 - y^3, \quad x = u \cdot v, \quad y = u^2 + v^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad x = r \cos t, \quad y = r \sin t \ (r = \text{const}); \quad \frac{dz}{dt} = ?$$

4) Для функции $z = 3ux^2$ найти:

а) производную в точке $M(-9, 12)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла;

б) $\text{grad } z$ в точке $M(-9, 12)$.

5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 - z^2 = 1$ в точке $M(1, 1, 1)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 - 2xy + y^4.$$

Вариант 20

1) Найти частные производные функции

$$u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \sqrt{xy}, \quad x = u^2 - v^2, \quad y = e^{uv};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \ln \cos \frac{\sqrt{x}}{y}, \quad x = \sqrt[3]{t+1}, \quad y = 3^t; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

4) Для функции $z = \ln \left(x + \frac{1}{y} \right)$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении от точки M к точке $O(0,0)$;

б) $\text{grad } z$ в точке $M(1,1)$.

5) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2z + y^2 + x^2 = 0$ в точке $M(1,1,-1)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = e^{\frac{x}{2}} (x + y^2).$$

Вариант 21

1) Найти частные производные функции

$$u = xy - \sin(x - 2y).$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \ln \frac{x}{y}, \quad x = u^2 v^3, \quad y = 2u - 5v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = e^{2x-y^2}, \quad x = \ln t, \quad y = \frac{1}{\cos t}; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

4) Для функции $z = \ln(x^2 + 2y^2)$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{3,4\}$;

б) $\text{grad } z$ в точке $M(1,1)$.

5) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 3xy - 6x - z = 0$ в точке $M(2,1,-2)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2 + 2x + 4y - x^2 - y^2.$$

Вариант 22

1) Найти частные производные функции

$$u = xe^{xy}.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \sqrt{x+y}, \quad x = u^2 - v^2, \quad y = e^{u+v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \ln \cos(xy), \quad x = \sqrt[3]{t+1}, \quad y = 2^t; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

4) Для функции $z = \sqrt{x^2 + 3y^2}$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{1,3\}$;

б) $\text{grad } z$ в точке $M(2,1)$.

5) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - y^2 + 6xy - z = 0$ в точке $M(2,3,31)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

Вариант 23

1) Найти частные производные функции

$$u = \ln(x + e^{-y}).$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \ln \frac{y}{3x-1}, \quad x = u^2 + v^2, \quad y = e^{3u-v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \operatorname{tg}(x^3 \cdot y^2), \quad x = \sqrt{t^2 + 1}, \quad y = t^6 + 5t; \quad \frac{dz}{dt} = ?$$

4) Для функции $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$ найти:

а) производную в точке $M(2,1)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{4,3\}$;

б) $\operatorname{grad} z$ в точке $M(1,2)$.

5) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2xy + 3y^2 - z = 0$ в точке $M(2,1,9)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = xy - x^2 - y^2 - 4y.$$

Вариант 24

1) Найти частные производные функции

$$u = \cos(xy^2).$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \sin(x^2 + y^3), \quad x = uv^2, \quad y = 4^{uv};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \cos \frac{\sqrt{x}}{y}, \quad x = \sqrt[3]{t}, \quad y = \sin 5t; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

4) Для функции $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{2, -1\}$;

б) $\text{grad } z$ в точке $M(1,1)$.

5) Записать $2x^2 + xy + y^2 - z = 0$ уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $M(1,1,4)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2/2 + 2xy + y^2/2 - 4x - 5y.$$

Вариант 25

1) Найти частные производные функции

$$u = \sin^2(3x + 2y).$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy}, \quad x = u - v^2, \quad y = uv;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \ln \sin \frac{\sqrt{x}}{y}, \quad x = \sqrt{t+1}, \quad y = 3^t; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

4) Для функции $z = \arcsin\left(\frac{x^2}{y}\right)$ найти:

а) производную в точке $M(1,2)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{5, -12\}$;

б) $\operatorname{grad} z$ в точке $M(1,2)$.

5) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^2 - xy + y - z = 0$ в точке $M(1,2,3)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + y^2 + xy - x + y.$$

Вариант 26

1) Найти частные производные функции

$$u = \ln(e^x + e^y).$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \arcsin \sqrt{xy}, \quad x = u^2 - v^2, \quad y = e^{2u-v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x}}{y}, \quad x = t^2 + t, \quad y = \operatorname{arctg} 2t; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

4) Для функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{-4, 3\}$;

б) $\operatorname{grad} z$ в точке $M(1,-1)$.

5) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - y^2 + 5x + 4y - z = 0$ в точке $M(1,1,9)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = 4 - (x - 2)^2 - (y - 3)^2.$$

Вариант 27

1) Найти частные производные функции

$$u = x \cos y + y \sin x.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \cos \sqrt{xy}, \quad x = u^2 v, \quad y = \sqrt[3]{u} - 4v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \ln \cos(xy), \quad x = \sqrt[3]{t^2 + 6}, \quad y = 10^t; \quad \frac{dz}{dt} = ?$$

4) Для функции $z = \operatorname{arctg}(x^3 y)$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{1, 2\}$;

б) $\operatorname{grad} z$ в точке $M(1,1)$.

5) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2xy + 3y^2 - 5x - z = 0$ в точке $M(2, 1, -3)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + y^2 - xy + x.$$

Вариант 28

1) Найти частные производные функции

$$u = \ln(x^2 + y^2).$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \operatorname{ctg} \sqrt{xy}, \quad x = u^3 + v^2, \quad y = 5u - v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \frac{\sqrt{x}}{y^2}, \quad x = \sin^2 t, \quad y = \operatorname{arcsin} \sqrt{t}; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

4) Для функции $z = \sqrt{2x^2 + y^2}$ найти:

а) производную в точке $M(2,1)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{2, -1\}$;

б) $\operatorname{grad} z$ в точке $M(2,1)$.

5) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $xy + 2y^2 - 2x - z = 0$ в точке $M(2,1,0)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = (x + 3)^2 - (y - 2)^2.$$

Вариант 29

1) Найти частные производные функции

$$u = e^{xy^2}.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \sqrt{x^2 y}, \quad x = \sin u + v^2, \quad y = \cos(uv);$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \ln \operatorname{tg}(xy), \quad x = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{t}, \quad y = e^t; \quad \frac{dz}{dt} = ?$$

4) Для функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ найти:

а) производную в точке $M(-1,2)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{1,2\}$;

б) $\operatorname{grad} z$ в точке $M(-1,2)$.

5) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 5xy + 3y^2 - z = 0$ в точке $M(1,1,-1)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = 6y - 3 - x^2 - 3y^2.$$

Вариант 30

1) Найти частные производные функции

$$u = \cos y + (y - x) \sin y.$$

2) Найти указанные частные производные сложной функции

$$z = \sqrt[4]{xy}, \quad x = \cos(u^2) - v^2, \quad y = 2^{uv};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

3) Найти полную производную сложной функции

$$z = \sqrt{xy}, \quad x = \arccos \sqrt{t}, \quad y = \arcsin(4t); \quad \frac{dz}{dt} = ?$$

4) Для функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ найти:

а) производную в точке $M(1, -4)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{-2, 5\}$;

б) $\text{grad } z$ в точке $M(1, -4)$.

5) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^2 - xy + 2y^2 - z = 0$ в точке $M(1, 1, 4)$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 5.$$

2.2 Методические указания к выполнению контрольной работы 2

Задача 1 - Найти частные производные функции

$$u = 2xy^2 + \sin(xy).$$

Решение – Найдем частную производную по x , т. е. $\frac{\partial u}{\partial x}$ или u'_x , при этом переменную y следует считать постоянной и дифференцировать функцию по x , применяя обычные правила дифференцирования функции одной переменной. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y^2 + y\cos(xy).$$

При нахождении частной производной по y считаем постоянной переменную x :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4xy + x\cos(xy).$$

Задача 2 - Найти частные производные сложной функции

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad x = \frac{u}{v}, \quad y = \frac{v}{u}.$$

Решение – Частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ находим по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Найдем отдельно все входящие в эти формулы производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{v}{u^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{u}.$$

Подставляя полученные производные в выражения для $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$,

получим:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{v} - \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{v}{u^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{u}{v^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{u}.$$

Задача 3 - Найти полную производную сложной функции

$$z = e^{x-2y}, \quad x = \sin t, \quad y = t^2.$$

Решение – Полную производную $\frac{dz}{dt}$ находим по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Найдем отдельно все производные, входящие в эту формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-2y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2e^{x-2y}, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t.$$

Подставляя в формулу для нахождения производной $\frac{dz}{dt}$, получим:

$$\frac{dz}{dt} = \cos t \cdot e^{x-2y} - 4t \cdot e^{x-2y} = e^{\sin t - 2t^2} \cdot (\cos t - 4t).$$

Задача 4 - Для функции $z = \arctg \frac{y}{x}$ найти:

а) производную в точке $M(1,2)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{-3, 4\}$;

б) $\overrightarrow{\text{grad } z}$ в точке $M(1,2)$.

Решение – 1) Производная функции нескольких переменных по направлению вектора $\vec{l}$ определяется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l}(M) = \frac{\partial z}{\partial x}(M) \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(M) \cdot \cos \beta,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$ - направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Найдем частные производные функции z в точке M

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(M) = -\frac{2}{5},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(M) = \frac{1}{5}.$$

Далее найдем направляющие косинусы вектора $\vec{l}$

$$\cos \alpha = \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} = \frac{-3}{\sqrt{9 + 16}} = -\frac{3}{5},$$

$$\cos \beta = \frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} = \frac{4}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4}{5}.$$

Подставляя в формулу, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial l}(M) = -\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

2) Градиентом функции $\overrightarrow{\text{grad } z}$ в точке $M(1,2)$ называется вектор

$$\overrightarrow{\text{grad } z} = \frac{\partial z}{\partial x}(M) \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}(M) \cdot \vec{j}.$$

Подставляя значения частных производных в точке M , получим:

$$\overrightarrow{\text{grad } z} = -\frac{2}{5} \vec{i} + \frac{1}{5} \vec{j}.$$

Задача 5 - Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2xy - y^2 - z = 3$ в точке $M(1,2,4)$.

Решение – Если поверхность задана как $F(x, y, z) = 0$, то касательная плоскость к данной поверхности в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ определяется уравнением

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0,$$

а нормаль –

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Найдем частные производные

$$F'_x = 2x + 2y, \quad F'_x(M_0) = 6,$$

$$F'_y = 2x - 2y, \quad F'_y(M_0) = -2,$$

$$F'_z = -1, \quad F'_z(M_0) = -1.$$

Подставив эти значения и координаты точки касания в уравнения, получим уравнение касательной плоскости

$$6 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (y - 2) - 1 \cdot (z - 4) = 0 \Rightarrow 6x - 2y - z + 2 = 0$$

и уравнение нормали

$$\frac{x - 1}{6} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z - 4}{-1}.$$

Задача 6 - Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 - xy + y^2 - x.$$

Решение – Найдем первые частные производные функции и приравняем их к нулю

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 1, \quad 2x - y - 1 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y, \quad -x + 2y = 0.$$

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$. Получим, что $x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1}{3}$.

Следовательно, функция имеет одну точку $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, где может существовать экстремум.

Найдем теперь вторые частные производные

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Согласно достаточным условиям экстремума выражение $AC - B^2 = 3 > 0$, следовательно, экстремум существует. Так как $A > 0$, то точка $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ есть точка минимума, и функция в этой точке принимает минимальное значение

$$z_{\min} \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Замечание - Если $A < 0$, то исследуемая точка будет точкой максимума функции, а если выражение $AC - B^2 < 0$, то в исследуемой точке экстремума не существует.

Рекомендуемая литература

- 1 Берман, Георгий Николаевич. Сборник задач по курсу математического анализа : учебное пособие для вузов / Г. Н. Берман.— стереотип. изд. — М. : Альянс, 2015 .— 384 с. : ил.
- 2 Данко П.Е., Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для студентов втузов. – в 2-х ч./ А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 2005. – 415с.
- 3 Марон, Исаак Абрамович. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной : учеб. пособие / И. А. Марон .— Москва : Лань, 2008 .— 400 с.: ил.
- 4 Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебник для втузов: в 2 томах / Н. С. Пискунов.— изд. стереотип. — М. : Интеграл-Пресс, 2001 .Т. 1 .— 544 с. : ил.
- 5 Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс/ Д. Т. Письменный. — М.: Айрис-Пресс, 2014. — 602 с.

Учебное электронное издание

Инна Леонтьевна Фаустова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Редактор: М. В. Ворожейкина

Выходит в авторской редакции