

Н.А. Мельникова



ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Северск, 2024

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Северский технологический институт –

филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет

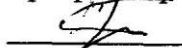
«МИФИ»

(СТИ НИЯУ МИФИ)

Утверждаю

Зав. кафедрой ВМиИТ

профессор

 В. Н. Брендаков

«03» апреля 2024 г.

Н.А. Мельникова

**ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ
И ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ**

Методические указания к лабораторной работе
по курсу «Вычислительные задачи систем автоматизации»
для студентов, обучающихся по направлению
подготовки бакалавров

15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» и
по специальности 14.05.04 «Электроника и автоматика
физических установок»

Северск 2024

УДК 519.62 (076)
ББК 22.193я73
М 482

Автор:

Мельникова Н.А. - канд. физ.-мат.наук, доцент кафедры «Высшая математика и информационные технологии», СТИ НИЯУ МИФИ;

Рецензент:

Федянин А. Л. - канд. тех. наук, доцент кафедры ЭИАФУ, СТИ НИЯУ МИФИ

Мельникова Н.А.

М 482 Численное дифференцирование и численное интегрирование: методические указания к лабораторной работе / Н.А. Мельникова; Северский технологический институт НИЯУ МИФИ – Северск: Издательство СТИ НИЯУ МИФИ, 2024. – 23 с. – Текст: электронный

Методические указания содержат описание лабораторной работы «Численное дифференцирование и численное интегрирование», соответствующей программе дисциплины «Вычислительные задачи систем автоматизации». Приведены: краткие теоретические сведения, постановка задачи, блок-схемы вычислительных алгоритмов, образцы программ на языке Pascal, образец выполнения задания в пакете Mathcad, индивидуальные задания для студентов, требования к отчету по лабораторной работе.

Методические указания предназначены для студентов СТИ НИЯУ МИФИ, обучающихся на дневном отделении по специальности «Электроника и автоматика физических установок» и по направлению подготовки «Автоматизация технологических процессов и производств».

Руководство рассмотрено и одобрено на заседании кафедры ВМиИТ и рекомендовано к изданию (протокол № 2 от 03 апреля 2024 г.).

Рег. № 6/24 от 03.04.2024 г.

Редактор М. В. Ворожейкина

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Северский технологический институт- филиал ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (СТИ НИЯУ МИФИ), 2024

Содержание

Введение.....	4
1 Теоретические сведения.....	5
1.1 Формулы численного дифференцирования	5
1.2 Формулы численного интегрирования.....	7
2 Постановка задачи лабораторной работы.....	10
2.1 Задание к лабораторной работе	10
2.2 Тестовый вариант лабораторной работы.....	10
3 Решение тестового варианта в Mathcad.....	11
3.1 Численное дифференцирование в Mathcad	11
3.2 Численное интегрирование в Mathcad.....	14
4 Решение тестового варианта в Pascal.....	16
4.1 Блок-схема (численное дифференцирование).....	16
4.2 Программа на языке Pascal (численное дифференцирование)	17
4.3 Блок-схема (численное интегрирование)	18
4.4 Программа на языке Pascal (численное интегрирование).....	19
5 Индивидуальные задания для лабораторной работы.....	20
5.1 Индивидуальные задания (дифференцирование)	20
5.2 Индивидуальные задания (интегрирование).....	21
6 Рекомендуемая литература	23

Введение

В научных исследованиях и технических расчетах очень узкий класс задач решается аналитически. Как правило, это простые случаи, основанные на существенном упрощении реальных процессов, явлений, свойств объектов. На практике же часто возникают задачи, которые либо невозможно решить с помощью известных аналитических методов, либо нужно решить с определенной точностью, не затрачивая ресурсы на поиск точного решения. В таких случаях применяют методы вычислительной математики (численные методы).

Широкое применение в решении различных инженерных задач находят методы численного дифференцирования и численного интегрирования.

Численное дифференцирование используется в обработке сигналов, для анализа динамических процессов в электрических цепях, для оценки скорости изменения состояний системы, вычисления производных сигналов для обратной связи.

Численное дифференцирование применяется для оценки энергии сигналов, расчета временных и энергетических характеристик электрических цепей, расчета интегральных характеристик системы, определения областей устойчивости системы, в задачах гидродинамики, теории упругости и т.д.

Численное решение задач математического анализа, линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений и других разделов математики проводят как с применением математических пакетов, так и посредством реализации алгоритмов на каком-либо языке программирования. Наиболее известны такие математические пакеты, как Maple, Matlab, Mathcad, Mathematica. В учебных целях, для понимания принципов построения алгоритмов, используют так называемые процедурные языки: Си, Fortran, Pascal, Basic.

Данные методические указания созданы для лабораторной работы «Численное дифференцирование и численное интегрирование», соответствующей программе дисциплины «Вычислительные задачи систем автоматизации». Целью изучения дисциплины является овладение студентами методами численного решения математических задач, приобретение ими опыта построения математических моделей и компьютерного моделирования, интерпретации результатов численных расчетов.

В лабораторной работе для реализации численных алгоритмов используется язык Pascal, проводятся вычисления в пакете Mathcad.

1 Теоретические сведения

1.1 Формулы численного дифференцирования

Численное дифференцирование применяется тогда, когда функцию трудно или невозможно продифференцировать аналитически. Например, в случае, когда функция задана таблицей. Кроме того, формулы численного дифференцирования используются при численном решении дифференциальных уравнений, нелинейных уравнений, при поиске точек экстремума функций и т.д. [1].

1) Вычисление первой производной.

Пусть функция $f(x)$ в окрестности точки x дифференцируема достаточно число раз. По определению производной $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Обозначим $\Delta x = h$, получим две простейшие приближённые формулы для $f'(x)$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}; \quad (1)$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad (2)$$

соответствующие $\Delta x = h$ и $\Delta x = -h$ (h – шаг, малый параметр).

(1) – *правая* разностная производная,

(2) – *левая* разностная производная.

Для оценки погрешностей

$$r_+(x, h) \approx f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}; \quad (3)$$

$$r_-(x, h) \approx f'(x) - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}; \quad (4)$$

введённых формул численного дифференцирования (погрешностей аппроксимации) используются условия:

$$|r_+(x, h)| \leq \frac{1}{2} M_2 \cdot h, \quad \text{где } M_2 = \max_{[x, x+h]} |f''(\xi)|, \quad \xi \in [x, x+h] \quad (5)$$

$$|r_-(x, h)| \leq \frac{1}{2} M_2 \cdot h, \quad \text{где } M_2 = \max_{[x-h, x]} |f''(\xi)|, \quad \xi \in [x-h, x] \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) имеют первый порядок точности по h , т.е. правая и левая разностные производные аппроксимируют производную $f'(x)$ с *первым порядком точности*.

Величину $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ называют *центральной разностной производной*, т.е.

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \quad (7)$$

Погрешность центральной разностной производной имеет оценку:

$$|r_0(x, h)| \leq \frac{1}{6} M_3 \cdot h^2, \quad \text{где } M_3 = \max_{[x-h, x+h]} |f'''(\xi)|, \quad \xi \in [x-h, x+h] \quad (8)$$

Центральная разностная производная аппроксимирует производную $f'(x)$ со вторым порядком точности относительно h .

Замечание 1. Для вычисления $f'(x)$ можно получить формулы любого порядка точности. Но в таких формулах с ростом порядка точности возрастает и число используемых значений функции, что не всегда удобно.

2) Вычисление второй производной.

Для вычисления второй производной $f''(x)$ используют чаще всего формулу вида

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2} \quad (9)$$

Выражение для погрешности:

$$r(x; h) = f''(x) - \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}, \quad (10)$$

оценка погрешности:

$$|r(x, h)| \leq \frac{1}{12} M_4 \cdot h^2, \quad \text{где } M_4 = \max_{[x-h, x+h]} |f^{(IV)}(\xi)|, \quad \xi \in [x-h, x+h] \quad (11)$$

Замечание 2. Формулы численного дифференцирования можно получать различными способами. Например, на основе интерполяции алгебраическими многочленами.

1.2 Формулы численного интегрирования

В прикладных задачах часто возникает необходимость вычисления значения определённого интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (12)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и её первообразную $F(x)$ удастся выразить через известные функции, то для вычисления применима формула Ньютона-Лейбница [6]:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (13)$$

Геометрически определенный интеграл есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, отрезком $[a; b]$ и прямыми $x = a$, $x = b$, как показано на рисунке 1.

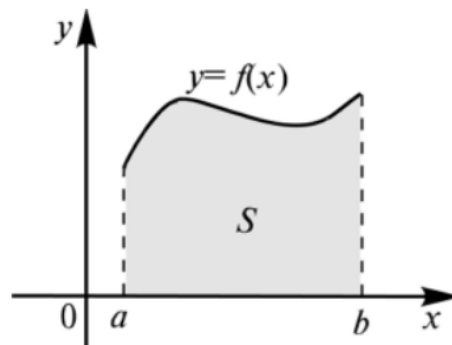


Рисунок 1 – Геометрический смысл определенного интеграла

В случаях, когда интеграл (12) не удаётся выразить через известные функции или когда подынтегральная функция задана таблицей, для его вычисления применяются численные методы. Наиболее часто используют квадратурные формулы [1].

Для получения квадратурных формул разобьем отрезок $[a; b]$ на элементарные отрезки точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Тогда интеграл I можно записать в виде суммы элементарных интегралов:

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \quad (14)$$

Введем обозначения: $x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $f_i = f(x_i)$, $f_{i-\frac{1}{2}} = f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$.

Обозначим $x_i - x_{i-1} = h$. Будем считать, что $h = \text{const}$, т.е. имеем таблицу с постоянным шагом. Тогда криволинейная трапеция разобьется на элементарные криволинейные трапеции.

1) *Формула прямоугольников.* Заменяя приближенно площадь каждой элементарной криволинейной трапеции площадью прямоугольника, основанием которого является отрезок $[x_{i-1}; x_i]$, а высота равна $f_{i-\frac{1}{2}}$, придем к элементарной квадратурной формуле прямоугольников:

$$I_i \approx h \cdot f_{i-\frac{1}{2}} \quad (15)$$

Пользуясь (15), получим составную квадратурную формулу прямоугольников:

$$I \approx \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n h \cdot f_{i-\frac{1}{2}} \quad (16)$$

Формула (16) соответствует приближенной замене площади исходной криволинейной трапеции площадью ступенчатой фигуры.

Замечание 3. Иногда в вычислениях используют формулы «левых» и «правых» прямоугольников [5]. Эти формулы в данной лабораторной работе не применяются.

2) *Формула трапеций.* Если на графике функции $y = f(x)$ соединить отрезками точки $(x_{i-1}; f(x_{i-1}))$ и $(x_i; f(x_i))$, получим фигуру, состоящую из трапеций. Заменим приближенно площадь элементарной криволинейной трапеции площадью полученной трапеции. Придем к элементарной квадратурной формуле трапеций:

$$I_i \approx h \cdot \frac{f_{i-1} + f_i}{2} \quad (17)$$

Из (17) получим составную квадратурную формулу трапеций:

$$I \approx \sum_{i=1}^n I_i = h \cdot \left[\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right] \quad (18)$$

Формула (18) соответствует приближенной замене площади исходной криволинейной трапеции площадью фигуры, ограниченной ломаной, проходящей через точки $(x_i; f(x_i))$, $i = \overline{0, n}$.

3) *Формула Симпсона.* Если площадь элементарной криволинейной трапеции заменить площадью фигуры, расположенной под параболой, проходящей через точки $(x_{i-1}; f(x_{i-1}))$, $\left(x_{i-\frac{1}{2}}; f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\right)$, $(x_i; f(x_i))$, $i = \overline{0, n}$, то получим элементарную квадратурную формулу Симпсона:

$$I_i \approx \frac{h}{6} \cdot \left(f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i \right) \quad (19)$$

Применяя (19) на каждом элементарном отрезке, приходим к составной квадратурной формуле Симпсона:

$$I \approx \sum_{i=1}^n I_i = \frac{h}{6} \cdot \left(f_0 + f_n + 4 \sum_{i=1}^n f_{i-\frac{1}{2}} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right) \quad (20)$$

Формулу (20) иногда называют формулой парабол [5].

Теорема 1. Пусть функция $y = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a; b]$. Тогда для составных квадратурных формул прямоугольников и трапеций справедливы следующие оценки погрешностей:

$$|I - I_{np}^h| \leq \frac{1}{24} M_2 \cdot (b-a) \cdot h^2 \quad (21)$$

$$|I - I_{mp}^h| \leq \frac{1}{12} M_2 \cdot (b-a) \cdot h^2 \quad (22)$$

где $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$.

Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ непрерывную производную четвертого порядка $f^{(IV)}(x)$. Тогда для формулы Симпсона справедлива оценка погрешности

$$|I - I_c^h| \leq \frac{M_4 \cdot (b-a)}{2880} \cdot h^4 \quad (23)$$

$$\text{где } M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(IV)}(x)|.$$

В формулах (21), (22), (23) I – точное, I_{np}^h , I_{mp}^h , I_C^h – приближенные значения интеграла. Оценки погрешностей (21), (22), (23) означают, что формулы прямоугольников и трапеций имеют второй порядок точности, формула Симпсона – четвертый.

2 Постановка задачи лабораторной работы

2.1 Задание к лабораторной работе

1) Функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. В точке $x = x_0$ с шагом $h = \frac{b-a}{n}$, где n – число разбиений отрезка $[a; b]$ найти приближенные значения первой и второй производных функции, составив программу на языке Pascal. Вычислить первую и вторую производные с помощью оператора дифференцирования в Mathcad.

2) Дан интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и его точное значение I . Составить программу на языке Pascal для вычисления приближенного значения интеграла методами прямоугольников, трапеций, Симпсона для случаев, когда отрезок интегрирования разбит на $n=2$ и $n=4$ равные части. Вычислить интеграл с помощью оператора интегрирования в Mathcad. Сравнить полученные значения интеграла с его точным значением I .

3) Оформить отчет.

Требования к отчету: 1) постановка задачи; 2) привести задание своего варианта; 3) описать порядок работы; 4) привести результаты, полученные с помощью программы и в Mathcad; 5) выводы по проделанной работе.

2.2 Тестовый вариант лабораторной работы

1) Функция $f(x) = \ln x$ определена на отрезке $[1; 1,03]$. Число разбиений отрезка $n = 3$, значения функции заданы таблицей 1.

Таблица 1.

x	1	1,01	1,02	1,03
$f(x)$	0	0,00995	0,019803	0,029559

Найти приближенные значения первой и второй производных функции в точке $x=1,01$, составив программу на языке Pascal. Вычислить первую и вторую производные функции с помощью оператора дифференцирования в Mathcad.

2) Дан интеграл $\int_0^1 e^{x^2} dx$ и его точное значение $I = 1,463$. Составить программу на языке Pascal для вычисления приближенного значения интеграла методами прямоугольников, трапеций, Симпсона для случая, когда отрезок интегрирования разбит на $n = 2$ и $n = 4$ равные части. Вычислить интеграл с помощью оператора интегрирования в Mathcad. Сравнить полученные значения интеграла с его точным значением.

3 Решение тестового варианта в Mathcad

3.1 Численное дифференцирование в Mathcad

Выполним в Mathcad следующие шаги:

- 1) Определяем точку, в которой нужно вычислить первую и вторую производные функции. Набираем $x := 1,01$, как показано на рисунке 2.

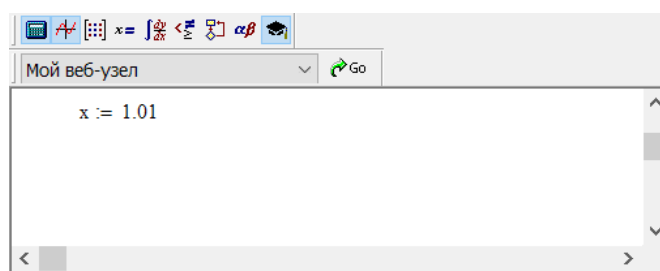


Рисунок 2 – Задание точки, в которой нужно вычислить производные

- 2) Выбираем панель инструментов «Математический анализ», как показано на рисунке 3.

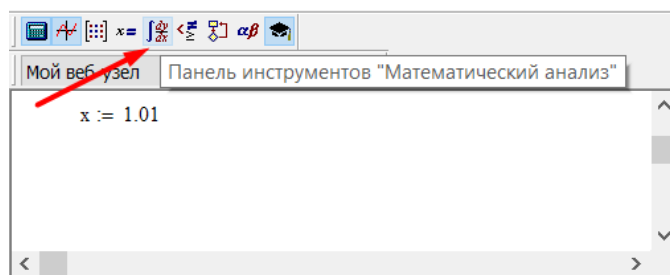


Рисунок 3 – Выбор панели инструментов «Математический анализ»

- 3) Устанавливаем курсор ниже задания точки (красный крестик). Затем выбираем на панели «Математический анализ» оператор производной первого порядка, как показано на рисунке 4.

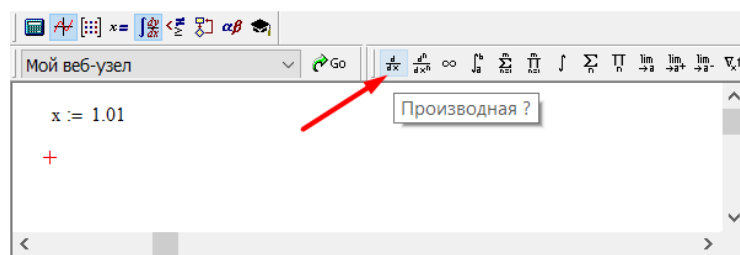


Рисунок 4 – Выбор оператора производной первого порядка

- 4) Появится оператор производной первого порядка с двумя местозаполнителями (черные прямоугольники), как показано на рисунке 5.

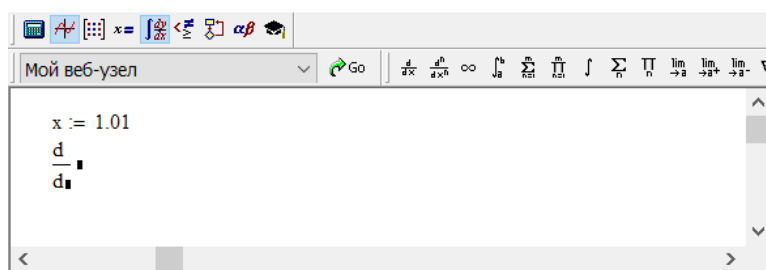


Рисунок 5 – Оператор производной первого порядка

- 5) В нижнем местозаполнителе (знаменателе) набираем x , в верхнем местозаполнителе набираем выражение, от которого нужно взять производную (в тестовом варианте это $\ln x$). Выделяем справа синим уголком весь оператор и нажимаем «=». Получим значение первой производной в точке $x := 1,01$, как показано на рисунке 6.



Рисунок 6 – Вычисление производной первого порядка

- 6) Вычисляем вторую производную. Для этого устанавливаем курсор ниже первой производной (красный крестик), выбираем на панели «Математический анализ» оператор производной n -го порядка, как показано на рисунке 7.

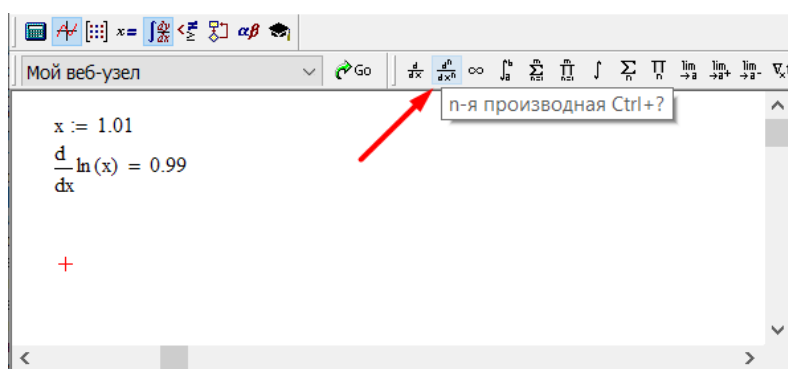


Рисунок 7 – Выбор оператора производной второго порядка

- 7) Появится оператор производной второго порядка с четырьмя местозаполнителями (черные прямоугольники), как показано на рисунке 8.

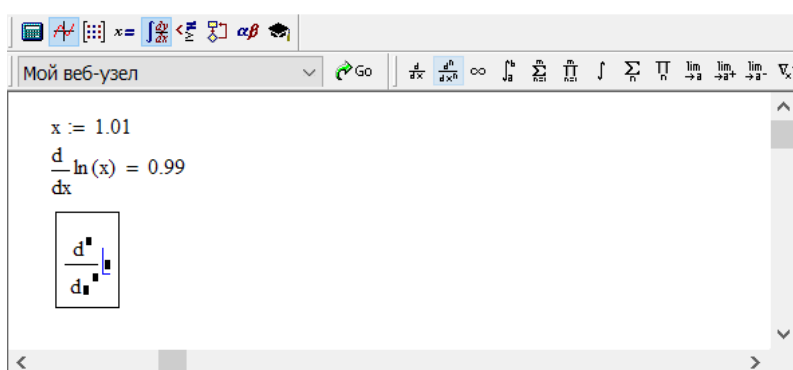


Рисунок 8 – Оператор производной второго порядка

- 8) Заполняем оператор второго порядка так, как показано на рисунке 9. Выделяем заполненный оператор справа синим уголком и нажимаем «=». Получим значение второй производной в точке $x := 1,01$.

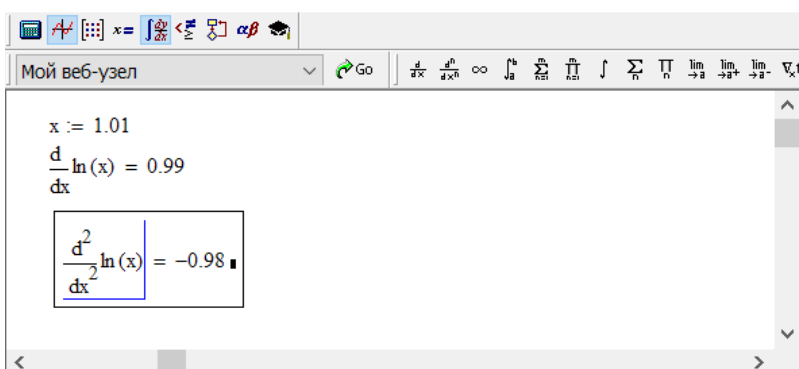


Рисунок 9 – Вычисление производной второго порядка

3.2 Численное интегрирование в Mathcad

Для приближенного вычисления определенного интеграла Mathcad использует численный алгоритм Ромберга [4].

Выполним в Mathcad следующие шаги:

- 1) Устанавливаем курсор (красный крестик). Выбираем на панели «Математический анализ» оператор определенного интеграла, как показано на рисунке 10.

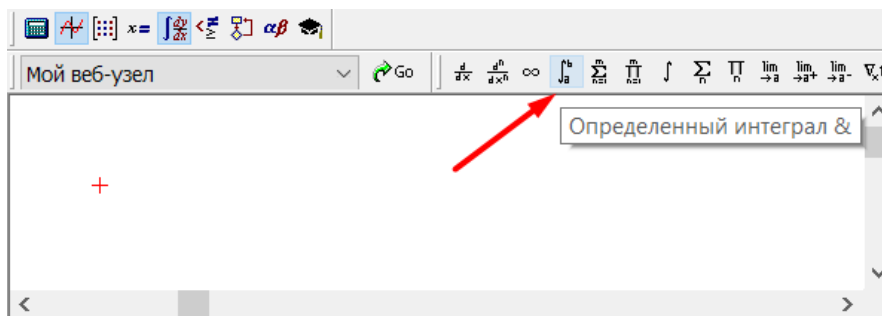


Рисунок 10 – Выбор оператора определенного интеграла

- 2) Появится оператор определенного интеграла с четырьмя местозаполнителями для пределов интегрирования, подынтегральной функции и переменной интегрирования (черные прямоугольники), как показано на рисунке 11.

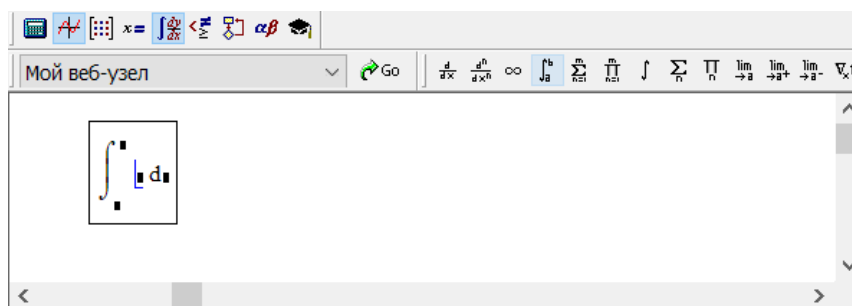


Рисунок 11 – Оператор определенного интеграла

- 3) Заполняем оператор определенного интеграла так, как показано на рисунке 12. Выделяем заполненный оператор справа синим уголком и нажимаем «=». Получим значение определенного интеграла на интервале в точке на отрезке $[0; 1]$.

The screenshot shows a web browser window with a Mathcad interface. The address bar shows 'Мой веб-узел'. The toolbar contains various mathematical symbols and operators. The main workspace displays the definite integral $\int_0^1 e^{x^2} dx = 1.463$.

Рисунок 12 – Вычисление определенного интеграла

Сделаем следующие замечания [7]:

Замечание 4. Пределы интегрирования должны быть вещественными. Выражение, которое нужно интегрировать, может быть либо вещественным, либо комплексным.

Замечание 5. Кроме переменной интегрирования, все переменные в подынтегральном выражении должны быть определены ранее в другом месте рабочего документа.

Замечание 6. Переменная интегрирования должна быть простой переменной без индекса.

Замечание 7. Если переменная интегрирования является размерной величиной, верхний и нижний пределы интегрирования должны иметь ту же самую размерность.

Замечание 8. Точность алгоритма интегрирования в Mathcad зависит от особенностей подынтегрального выражения. Если выражение, которое нужно интегрировать, имеет особенности, разрывы или быстро осциллирует, численное решение, найденное Mathcad, может быть неточно.

Замечание 9. Для вычисления точного значения интеграла или для нахождения неопределенного интеграла могут быть использованы возможности символьных вычислений Mathcad.

Замечание 10. Поскольку метод интегрирования Mathcad делит интервал на четыре подынтервала, а затем удваивает число точек разбиения, это может привести к неправильным результатам для периодических функций с периодом $1/2^n$ от длины интервала. Чтобы обойти эту проблему, делите интервал на два подынтервала, не кратных периоду функции, и интегрируйте по каждому подынтервалу отдельно.

4 Решение тестового варианта в Pascal

4.1 Блок-схема (численное дифференцирование)

На рисунке 13 представлена общая блок-схема численного дифференцирования для случая производных первого и второго порядков с одинаковым порядком аппроксимации по шагу h .

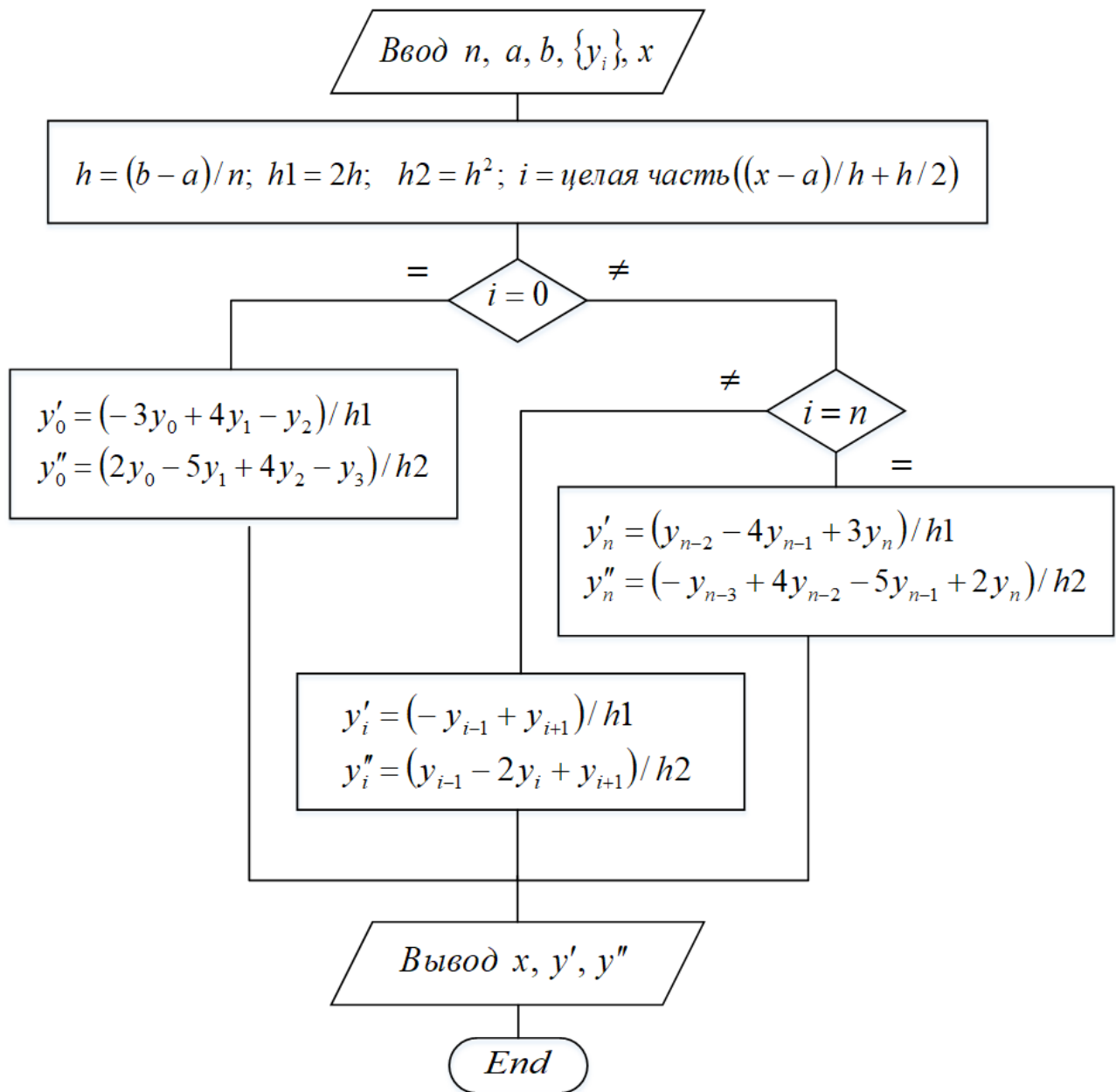


Рисунок 13 – Блок-схема численного дифференцирования для случая производных первого и второго порядков.

4.2 Программа на языке Pascal (численное дифференцирование)

```
program derivative;
const p=5;
var
  i,n: integer;
  a,b,h,h1,h2,x,y1,y2:real;
  y:array[0..p] of real;
//Основная программа
begin
  writeln ('Введите n - число разбиений отрезка [a,b]');
  read (n);
  if (n>=3) and (n<=15) then
  begin
    writeln ('Введите координаты концов отрезка a, b');
    read (a, b);
    writeln ('Введите значения функции y[i] в узлах');
    for i:=0 to n do read (y[i]);
    writeln ('Введите значение x');
    read (x);
    h:=(b-a)/n;
    i:=TRUNC((x-a)/h+h/2);{целая часть числа}
    h1:=2*h;
    h2:=h*h;
    if i=0 then
    begin
      y1:=(-3*y[0]+4*y[1]-y[2])/h1;
      y2:=(2*y[0]-5*y[1]+4*y[2]-y[3])/h2;
    end;
    if (i>0) and (i<n) then
    begin
      y1:=(-y[i-1]+y[i+1])/h1;
      y2:=(y[i-1]-2*y[i]+y[i+1])/h2;
    end;
    if i=n then
    begin
      y1:=(y[n-2]-4*y[n-1]+3*y[n])/h1;
      y2:=(-y[n-3]+4*y[n-2]-5*y[n-1]+2*y[n])/h2;
    end;
    write ('x=', x, ' ', 'y`=', y1);
    writeln (' ', 'y``=', y2);
  end
  else writeln ('проверьте число разбиений');
end.
```

Результат тестового расчета

```
Введите n - число разбиений отрезка [a,b]
3
Введите координаты концов отрезка a, b
1 1.03
Введите значения функции y[i] в узлах,
0 0.00995 0.019803 0.029559
Введите значение x
1.01
x=1.01   y`= 0.9901499999999999   y``=-0.9699999999999997
```

4.3 Блок-схема (численное интегрирование)

На рисунке 14 представлена блок-схема численного интегрирования по квадратурным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона. В схеме приняты следующие обозначения: a, b – пределы интегрирования; n – число делений отрезка интегрирования; $f(x)$ – подынтегральная функция; $s1, s2, s3$ – приближенные значения интеграла соответственно по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

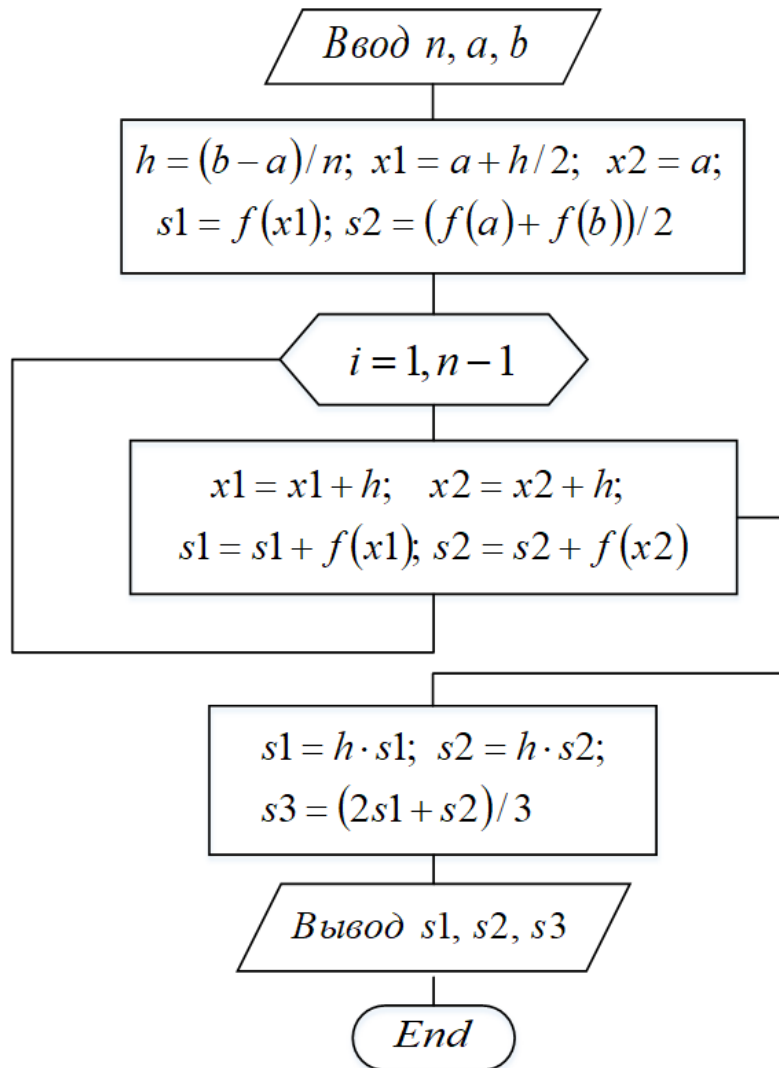


Рисунок 14 – Блок-схема численного интегрирования по квадратурным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

4.4 Программа на языке Pascal (численное интегрирование)

```
program integration;
var
  i,n: integer;
  a,b,h,s1,s2,s3,x,x1,x2:real;
//Подпрограмма "подынтегральная функция"
function f(x:real):real;
begin
  f:=exp(x*x)
end;
//Основная программа
begin
  writeln ('Введите значения концов отрезка [a,b]');
  read (a,b);
  writeln ('Введите число разбиений отрезка n');
  read (n);
  if n>=2 then
  begin
    h:=(b-a)/n;
    x1:=a+h/2;
    x2:=a;
    s1:=f(x1);
    s2:=(f(x2)+f(b))/2;
    for i:=1 to n-1 do
    begin
      x1:=x1+h;
      x2:=x2+h;
      s1:=s1+f(x1);
      s2:=s2+f(x2);
    end;
    s1:=h*s1;
    s2:=h*s2;
    s3:=(2*s1+s2)/3;
    writeln ('s1=',s1:8:5, ' ', 's2=',s2:9:6, ' ', 's3=',s3)
  end
  else writeln ('проверьте число разбиений');
end.
```

Результат тестового расчета

```
Введите значения концов отрезка [a,b]
0 1
Введите число разбиений отрезка n
2
s1=1.40977 s2=1.571583 s3=1.4637107604456

Введите значения концов отрезка [a,b]
0 1
Введите число разбиений отрезка n
4
s1=1.44875 s2=1.490679 s3=1.46272341467327
```

5 Индивидуальные задания для лабораторной работы

5.1 Индивидуальные задания (дифференцирование)

1. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[1,00; 1,15]$

x	e^x	e^{-x}	$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$
1,00	2,71828	0,367878	0,84147	0,54030	0,0000
1,05	2,85765	0,34994	0,86742	0,49757	0,04879
1,10	3,00417	0,33287	0,89121	0,45360	0,09531
1,15	3,15819	0,31665	0,91276	0,40849	0,13976

Найти приближенное значение производной $f'(x)$ в узлах таблицы. Сравнить результат с точным значением производной в узлах таблицы (найти производную от функции по таблице производных и подставить значения x).

Вариант	$f(x)$	Вариант	$f(x)$
1	$\sin x$	14	$\cos x$
2	$\cos x$	15	$\sin x$
3	$\ln x$	16	$\cos x$
4	e^{-x}	17	$\ln x$
5	$\cos x$	18	e^x
6	e^{-x}	19	e^x
7	e^{-x}	20	e^x
8	$\sin x$	21	$\sin x$
9	e^{-x}	22	e^x
10	$\ln x$	23	$\ln x$
11	$\sin x$	24	$\ln x$
12	$\cos x$	25	e^x
13	e^{-x}		

5.2 Индивидуальные задания (интегрирование)

Составить программу на языке Pascal для вычисления приближенного значения интеграла методами прямоугольников, трапеций, Симпсона для случая, когда отрезок интегрирования разбит на $n = 2$ и $n = 4$ равные части. Вычислить интеграл с помощью оператора интегрирования в Mathcad. Сравнить полученные значения интеграла с его точным значением.

Вариант	Интеграл	Точное значение	Вариант	Интеграл	Точное значение
1	$\int_0^1 \arctg x \, dx$	$\frac{1}{4}(\pi - 2\ln 2) \approx 0,438$	14	$\int_0^{\pi/4} \tg x \, dx$	$\frac{1}{2}\ln 2 \approx 0,346$
2	$\int_0^{\pi/4} \tg^2 x \, dx$	$\frac{4 - \pi}{4} \approx 0,215$	15	$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}$	$\ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0,881$
3	$\int_1^e \ln^2 x \, dx$	$e - 2 \approx 0,718$	16	$\int_0^{\sqrt{2}/2} \arcsin x \, dx$	$\frac{\sqrt{2}}{8}(\pi + 4) - 1 \approx 0,26$
4	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}$	1	17	$\int_0^1 x e^x \, dx$	1
5	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ctg x \, dx$	$\frac{1}{2}\ln 2 \approx 0,346$	18	$\int_0^1 \sqrt{1+x} \, dx$	$\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \approx 1,22$
6	$\int_0^1 \ln(x+1) \, dx$	$2\ln 2 - 1 \approx 0,386$	19	$\int_0^e \ln x \, dx$	1
7	$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$	$\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,571$	20	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$	$2(\sqrt{2} - 1) \approx 0,828$
8	$\int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$	$\arctg e - \frac{\pi}{4} \approx 0,433$	21	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0,881$
9	$\int_0^{\pi} \cos^3 x \, dx$	0	22	$\int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx$	$\frac{e^{\pi/2} - 1}{2} \approx 1,905$

10	$\int_0^{\pi/4} \sin 4x \, dx$	0,5	23	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 x \, dx$	$\frac{4 - \pi}{4} \approx 0,215$
11	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$	1	24	$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$	$\frac{\pi}{4} \approx 0,785$
12	$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x}$	$\ln 2 \approx 0,693$	25	$\int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx$	$\frac{e^{\pi/2} + 1}{2} \approx 2,905$
13	$\int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x}$	0,38			

6 Рекомендуемая литература

- 1 Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики: учеб. пособие. 8-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2022. – 672 с.
- 2 Кудрявцев Е.М. Mathcad11: полное руководство по русской версии / Е.М. Кудрявцев. – М.: ДМК Пресс, 2009. – 592 с.
- 3 Ракитин В.И. Руководство по методам вычислений и приложений МATHCAD: учебное пособие / В.И. Ракитин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 264 с.
- 4 Русина Л.Г. Вычислительная математика. Численные методы интегрирования и решения дифференциальных уравнений и систем: Учебное пособие для вузов / Л.Г. Русина. – 2-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2022. – 168 с.
- 5 Срочко В.А. Численные методы. Курс лекций: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2022. – 208 с.
- 6 Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник. В 3-х тт. Т.1. – 12-е изд., стер. / Г.М. Фихтенгольц – СПб.: Лань, 2018. – 608 с.
- 7 Образовательный математический сайт: сайт. URL: <http://old.exponenta.ru> (дата обращения 21.02.2024)