

Н.А. Мельникова



ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Северск, 2024

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Северский технологический институт –

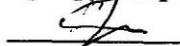
филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет
«МИФИ»

(СТИ НИЯУ МИФИ)

Утверждаю

Зав. кафедрой ВМиИТ

профессор

 В. Н. Брендаков

«03» апреля 2024 г.

Н.А. Мельникова

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания к лабораторной работе
по курсу «Вычислительные задачи систем автоматизации»
для студентов, обучающихся по направлению
подготовки бакалавров

15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» и
по специальности 14.05.04 «Электроника и автоматика
физических установок»

Северск 2024

УДК 519.62 (076)
ББК 22.193я73
М 482

Автор:

Мельникова Наталья Александровна - канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика и информационные технологии», СТИ НИЯУ МИФИ;

Рецензент:

Федянин А. Л. - канд. тех. наук, доцент кафедры ЭИАФУ, СТИ НИЯУ МИФИ

Мельникова Н.А.

М 482 Численное решение систем линейных уравнений: методические указания к лабораторной работе / Н.А. Мельникова; Северский технологический институт НИЯУ МИФИ – Северск: Издательство СТИ НИЯУ МИФИ, 2024. – 21 с. – Текст: электронный

Методические указания содержат описание лабораторной работы «Численное решение систем линейных уравнений», соответствующей программе дисциплины «Вычислительные задачи систем автоматизации». Приведены: краткие теоретические сведения, постановка задачи, блок-схемы вычислительных алгоритмов, образцы программ на языке Pascal, образец выполнения задания в пакете Mathcad, индивидуальные задания для студентов, требования к отчету по лабораторной работе.

Методические указания предназначены для студентов СТИ НИЯУ МИФИ, обучающихся на дневном отделении по специальности «Электроника и автоматика физических установок» и по направлению подготовки «Автоматизация технологических процессов и производств».

Руководство рассмотрено и одобрено на заседании кафедры ВМиИТ и рекомендовано к изданию (протокол № 2 от 03 апреля 2024 г.).

Издается в соответствии с планом выпуска учебно-методической литературы на 2024 г., утвержденным Ученым Советом СТИ НИЯУ МИФИ.

Рег. № 5/24 от 03.04.2024 г.

Редактор М. В. Ворожейкина

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Северский технологический институт- филиал ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (СТИ НИЯУ МИФИ), 2024

Содержание

Введение.....	4
1 Теоретические сведения	5
1.1 Общие сведения из линейной алгебры	5
1.2 Метод Гаусса решения СЛАУ	6
1.3 Метод простых итераций решения СЛАУ	8
2 Постановка задачи лабораторной работы	10
2.1 Задание к лабораторной работе	10
2.2 Тестовый вариант лабораторной работы	10
3 Решение тестового варианта методом Жордана-Гаусса в Mathcad....	10
4 Решение тестового варианта методом простых итераций в Pascal	14
4.1 Блок-схема метода простых итераций решения СЛАУ	14
4.2 Программа на языке Pascal метода простых итераций	16
5 Индивидуальные задания для лабораторной работы.....	18
6 Рекомендуемая литература	21

Введение

В научных исследованиях и технических расчетах очень узкий класс задач решается аналитически. Как правило, это простые случаи, основанные на существенном упрощении реальных процессов, явлений, свойств объектов. На практике же часто возникают задачи, которые либо невозможно решить с помощью известных аналитических методов, либо нужно решить с определенной точностью, не затрачивая ресурсы на поиск точного решения. В таких случаях применяют методы вычислительной математики (численные методы).

Важнейшим инструментом решения инженерных задач являются численные методы линейной алгебры. К ним относятся: методы мультипликативного разложения матриц, методы обращения матриц, методы решения проблемы собственных значений и собственных векторов матриц, прямые и итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Математический аппарат линейной алгебры используется в таких задачах, как обработка и анализ данных; схемотехническое моделирование электронных устройств (проектирование и анализ фильтров, контроллеров, операционных усилителей и др.); линеаризация систем дифференциальных уравнений, описывающих движение, процессы передачи, обмена и преобразования энергии в случаях, когда отклонения изменяющихся величин от их установившихся значений малы.

Численное решение задач математического анализа, линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений и других разделов математики проводят как с применением математических пакетов, так и посредством реализации алгоритмов на каком-либо языке программирования. Наиболее известны такие математические пакеты, как Maple, Matlab, Mathcad, Mathematica. В учебных целях, для понимания принципов построения алгоритмов, используют так называемые процедурные языки: Си, Fortran, Pascal, Basic.

Данные методические указания созданы для лабораторной работы «Численное решение систем линейных уравнений», соответствующей программе дисциплины «Вычислительные задачи систем автоматизации». Целью изучения дисциплины является овладение студентами методами численного решения математических задач, приобретение ими опыта построения математических моделей и компьютерного моделирования, интерпретации результатов численных расчетов.

В лабораторной работе для реализации численных алгоритмов используется язык Pascal, проводятся вычисления в пакете Mathcad.

$$\text{где } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

В качестве начального приближения $X^{(0)}$ возьмём вектор β . Подставим в правую часть уравнения (9), получим первое приближение решения $X^{(1)}$:

$$X^{(1)} = \alpha X^{(0)} + \beta, \quad (10)$$

Подставим найденное приближение $X^{(1)}$ в уравнение (10), получим второе приближение решения $X^{(2)}$:

$$X^{(2)} = \alpha X^{(1)} + \beta, \quad (11)$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность приближений:

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \alpha X^{(0)} + \beta, \\ X^{(2)} &= \alpha X^{(1)} + \beta, \\ &\dots\dots\dots \\ X^{(k+1)} &= \alpha X^{(k)} + \beta, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (12)$$

Достаточные условия сходимости итераций к точному решению даёт следующая теорема [1].

Теорема (достаточные условия сходимости метода итераций).

Если для приведённой системы (8) какая-либо из норм матрицы α меньше 1 ($\|\alpha\|_l < 1$ либо $\|\alpha\|_m < 1$, либо $\|\alpha\|_k < 1$), то последовательность итераций (12) сходится к единственному решению $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ уравнения (9)

независимо от выбора начального приближения.

Обычно в расчётах в качестве начального приближения $X^{(0)}$ берут вектор β .

Погрешность приближенного решения уравнения (9) на k -том шаге оценивают неравенством

$$\|\xi - X^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\beta\| \quad (13)$$

В неравенстве (13) используются согласованные нормы для матриц и векторов (m - и l -нормы).

На практике для оценки погрешности k -го приближения $X^{(k)}$ к решению ξ применяют более удобную форму неравенства (13):

$$\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \leq \frac{1 - \|\alpha\|}{\|\alpha\|} \cdot \varepsilon \quad (14)$$

2 Постановка задачи лабораторной работы

2.1 Задание к лабораторной работе

Для СЛАУ
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$
 требуется:

- 1) решить систему методом Жордана-Гаусса в Mathcad;
- 2) составить программу на языке Pascal для решения системы методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$, получить решение системы;
- 3) оформить отчет.

Требования к отчету: 1) постановка задачи; 2) привести задание своего варианта; 3) описать порядок работы; 4) привести результаты, полученные с помощью программы и в Mathcad; 5) выводы по проделанной работе.

2.2 Тестовый вариант лабораторной работы

Найти решение системы линейных уравнений
$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$, составив программу на языке Pascal. Решить данную систему методом Жордана-Гаусса в Mathcad.

Сравнить полученное решение с точным решением $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3 Решение тестового варианта методом Жордана-Гаусса в Mathcad

Решение систем линейных алгебраических уравнений в Mathcad можно произвести различными методами (метод Крамера, матричный ме-

тод), с использованием различных встроенных функций (например, блок given в сочетании с функцией Find).

В данной лабораторной работе требуется решить систему методом Жордана-Гаусса с использованием функции [4].

Выполним в Mathcad следующие шаги:

1) Задаем значение системной переменной $ORIGIN:=1$, как показано на рисунке 1. Эта переменная отвечает за номер первой строки (столбца) матрицы или первой координаты вектора. По умолчанию в Mathcad строки(столбцы) матриц и координаты векторов нумеруются с нуля ($ORIGIN:=0$). В системах линейных уравнений нумерацию строк (столбцов) и координат векторов принято начинать с 1.

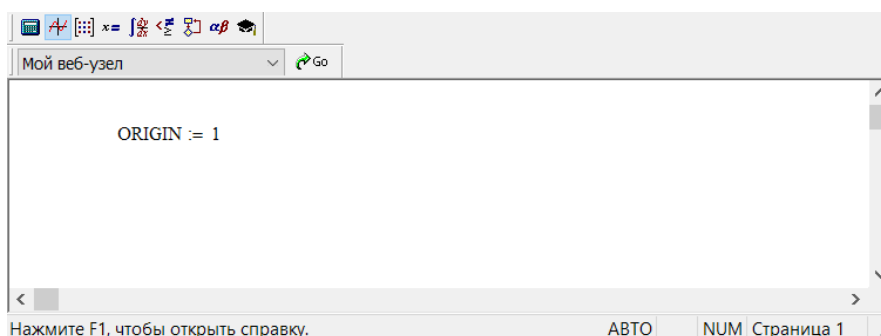


Рисунок 1 – Задание системной переменной ORIGIN

2) Вводим основную матрицу системы A и вектор свободных членов системы B , как показано на рисунке 2.

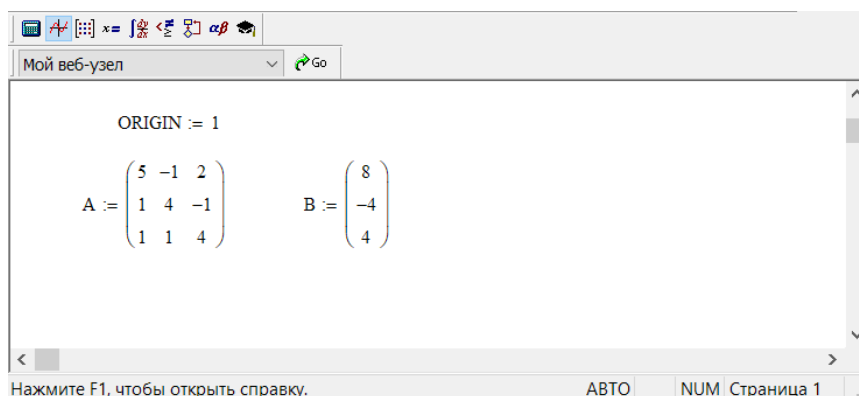


Рисунок 2 – Задание матрицы A и вектора B

3) Формируем расширенную матрицу системы с помощью функции объединения матриц $\text{augment}(A, B)$, как показано на рисунке 3. Расширенной матрице присваиваем имя Ag . Объединяемые матрицы (массивы) A и B должны иметь одинаковое число строк.

Следите за тем, чтобы все переменные набирались в английской раскладке!

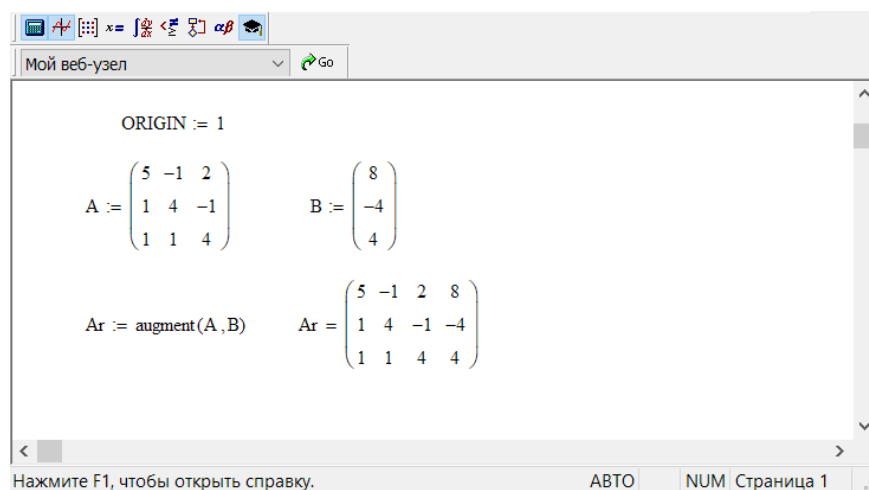


Рисунок 3 – Формирование расширенной матрицы Ar

4) Определяем ранги основной и расширенной матриц с помощью функции $\text{rank}(A)$, как показано на рисунке 4. Сравниваем полученные ранги между собой и с числом неизвестных системы. В нашем число неизвестных системы $n = 3$. Ранги основной и расширенной матриц системы совпадают и равны числу неизвестных системы, следовательно, система определённа (имеет единственное решение).

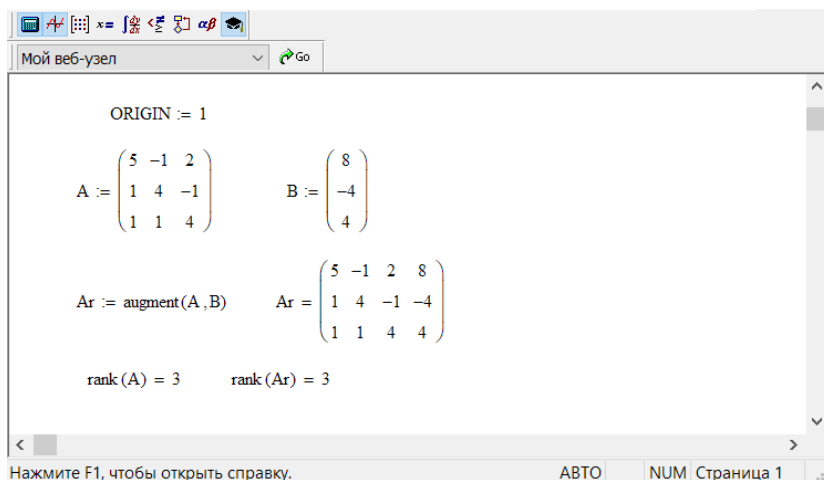


Рисунок 4 – Определение рангов основной и расширенной матриц

5) Осуществляем прямой и обратный ходы метода Жордана-Гаусса. Для этого применяем функцию $\text{rref}(Ar)$, которая выполняет элементарные преобразования со строками расширенной матрицы

системы Ar , приводит её к ступенчатому виду с единичной матрицей на месте основной матрицы системы, как показано на рисунке 5.

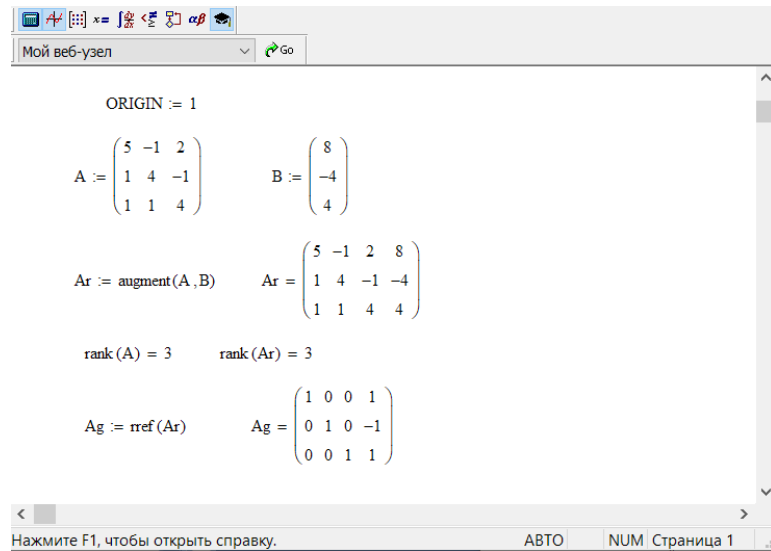


Рисунок 5 – Приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду

6) Формируем столбец решения системы. Для этого применяем функцию $\text{submatrix}(A, ir, jr, ic, jc)$. Эта функция формирует субматрицу, состоящую из всех элементов, содержащихся в строках с ir по jr и в столбцах с ic по jc массива A . В матрице Ar столбец решения содержится в строках с 1 по 3 и столбцах с 4 по 4, значит, задаём $\text{submatrix}(Ar, 1, 3, 4, 4)$. как показано на рисунке 6.

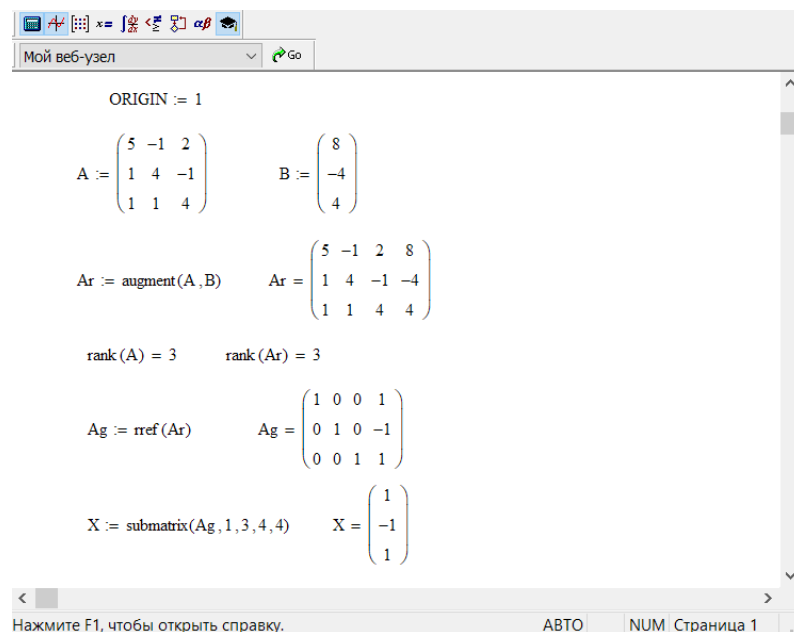


Рисунок 6 – Формирование столбца решения системы

4 Решение тестового варианта методом простых итераций в Pascal

4.1 Блок-схема метода простых итераций решения СЛАУ

На рисунке 7 представлена общая блок-схема метода простых итераций решения СЛАУ

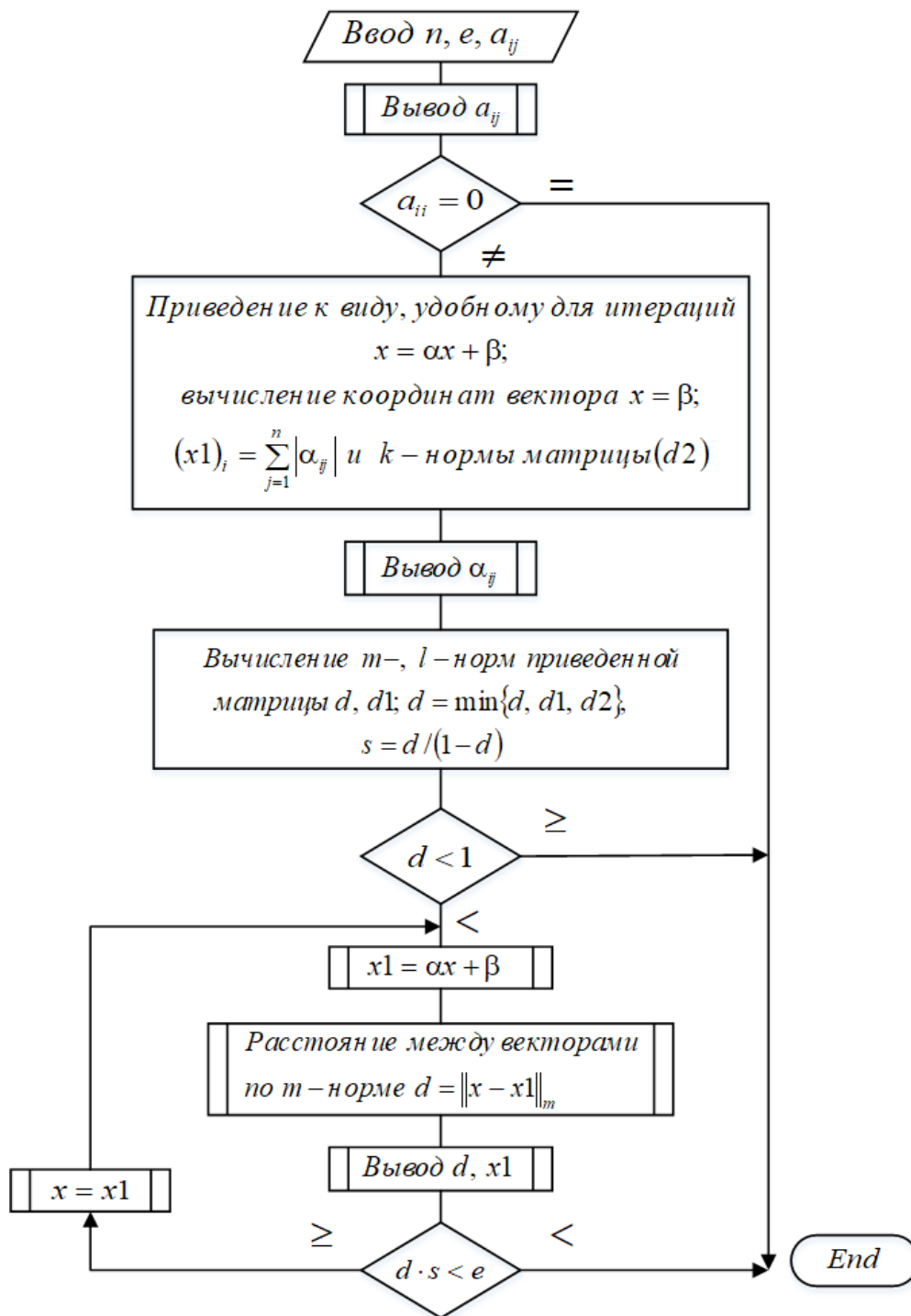


Рисунок 7. Блок-схема метода простых итераций решения СЛАУ

На рисунке 8 представлены более подробные фрагменты блок-схемы метода простых итераций решения СЛАУ.

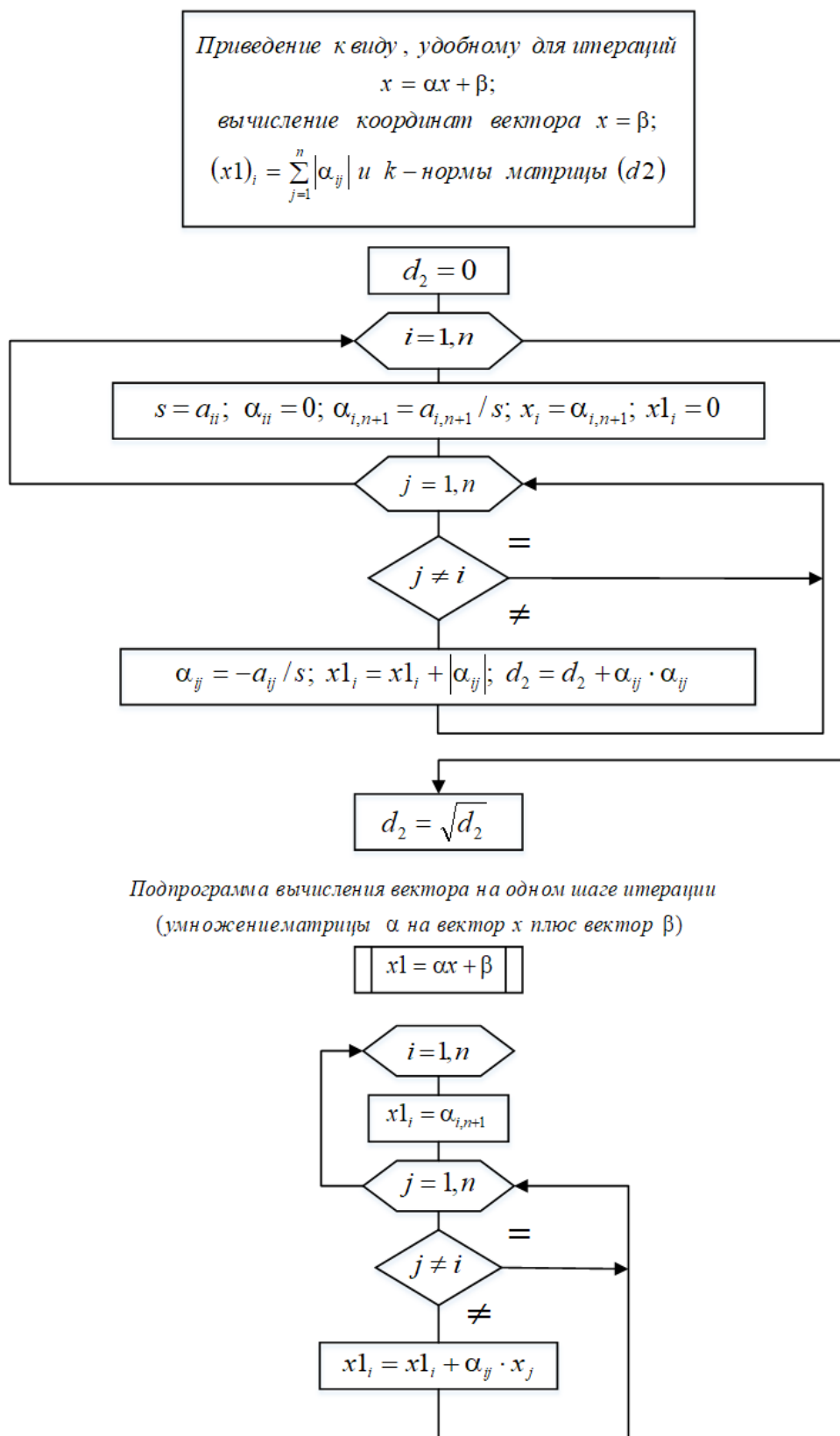


Рисунок 8. Фрагменты блок-схемы численного решения СЛАУ метода простых итераций

4.2 Программа на языке Pascal метода простых итераций

```
program iter;
const N=3;
var i,j,counter: integer;
a:array [1..N,1..N+1] of real;
e,d,d1,d2,s: real;
x: array [1..N] of real;
x1: array [1..N] of real;
//-----
//основная программа
//-----
begin
writeln ('введите точность эпсилон');
read (e);
writeln ('введите расширенную матрицу системы');
for i:=1 to N do
for j:= 1 to N+1 do
read(a[i,j]);
//-----
//проверка условия: диагональные элементы отличны от нуля
//-----
for i:=1 to N do
if a[i,i]=0 then
write ('система решается другим методом');
//-----
//преобразование матрицы к виду, удобному для итераций
//вычисление вектора X1
//вычисление k-нормы приведенной матрицы
//-----
for i:=1 to n do
begin
s:=a[i,i];
a[i,i]:=0;
x1[i]:=0;
a[i,n+1]:=a[i,n+1]/s;
x[i]:=a[i,n+1];
for j:=1 to n do
if j<>i then
begin
a[i,j]:=-a[i,j]/s;
x1[i]:=x1[i]+abs(a[i,j]);
d2:=d2+abs(a[i,j])*abs(a[i,j]);
end;
end;
d2:=sqrt(d2);
writeln ('k-норма приведенной матрицы равна ',d2);
//-----
//вычисление m-нормы приведенной матрицы
//-----
for i:=1 to n do
begin
x1[i]:=0;
for j:=1 to n do
if j<>i then x1[i]:=x1[i]+abs(a[i,j]);
end;
```

```

d:=x1[1];
for i:=1 to n do
if x1[i]>d then d:=x1[i];
writeln ('m-норма приведенной матрицы равна ',d:6:4);
//-----
//вычисление l-нормы приведенной матрицы
//-----
for i:=1 to n do
begin
x1[i]:=0;
for j:=1 to n do
if j<>i then x1[i]:=x1[i]+abs(a[j,i]);
end;
d1:=x1[1];
for i:=1 to n do
if x1[i]>d1 then d1:=x1[i];
writeln ('l-норма приведенной матрицы равна ',d1:6:4);
//-----
//нахождение наименьшей из трёх норм
//-----
if d1<d then d:=d1;
if d2<d then d:=d2;
writeln ('наименьшая норма равна ',d:6:4);
if d>=1 then
writeln ('достаточные условия сходимости метода итераций не удовле-
творяются')
else
begin
writeln ('достаточные условия сходимости метода итераций удовлетво-
ряются');
s:=d/(1-d);
writeln ('s=', s:6:4)
end;
//-----
//выполнение последовательных итераций
//-----
counter:=0;
repeat
begin
for i:=1 to n do
begin
x1[i]:=a[i,n+1];
for j:=1 to n do
if j<>i then
x1[i]:=x1[i]+a[i,j]*x[j];
end;
end;
for i:=1 to n do
x[i]:=x1[i]-x[i];
d:=abs(x[1]);
for i:=1 to n do
if abs(x[i])>d then
d:=abs(x[i]);
for i:=1 to n do
x[i]:=x1[i];
writeln ('d*s = ', d*s:6:4);
counter:=counter+1;

```

```

until d*s<e;
for i:=1 to N do
writeln(x[i]:6:4,' ');
writeln ('заданная точность достигается на шаге ', counter)
end.

```

Результаты тестовых расчетов для системы
$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

```

введите точность эпсилон
0.01
введите расширенную матрицу системы
5 -1 2 8
1 4 -1 -4
1 1 4 4
k-норма приведенной матрицы равна 0.670820393249937
m-норма приведенной матрицы равна 0.6000
l-норма приведенной матрицы равна 0.6500
наименьшая норма равна 0.6000
достаточные условия сходимости метода итераций удовлетворяются
s=1.5000
d*s = 0.9000
d*s = 0.2813
d*s = 0.0788
d*s = 0.0332
d*s = 0.0099
0.9992
-0.9986
0.9986
заданная точность достигается на шаге 5

```

5 Индивидуальные задания для лабораторной работы

- 1) Решить систему методом Жордана-Гаусса в Mathcad
- 2) Найти решение системы линейных уравнений методом простых итераций с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$, составив программу на языке Pascal. Сравнить полученное решение с точным решением ξ .

Вариант	A	B	ξ
1	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

4	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

18	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6 Рекомендуемая литература

- 1 Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики: учеб. пособие. 8-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2022. – 672 с.
- 2 Зубков В.Г., Ляховский В.А., Мартыненко А.И., Миносцев В.Б. Курс математики для технических высших учебных заведений. Часть 1. Аналитическая геометрия. Пределы и ряды. Функции и производные. Линейная и векторная алгебра: учеб. пособие / под ред. В.Б. Миносцева, Е.А. Пушкаря. 2-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2022. – 544 с.
- 3 Кудрявцев Е.М. Mathcad11: полное руководство по русской версии / Е.М. Кудрявцев. – М.: ДМК Пресс, 2009. – 592 с.
- 4 Ракитин В.И. Руководство по методам вычислений и приложений МАТНСАД: учебное пособие / В.И. Ракитин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 264 с.
- 5 Фаддев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры: учебник. 4-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2022. – 736 с.