

Л.Н. Лохтина,
Е.С. Логинова



АЛГЕБРА ЛОГИКИ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

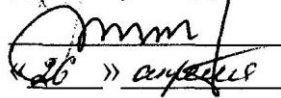
Северск, 2024

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Северский технологический институт –
филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего
образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(СТИ НИЯУ МИФИ)

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой ЭиАТП

доцент, канд. техн. наук



А. Л. Федянин

2024 г.

Л.Н. Лохтина, Е.С. Логинова

**АЛГЕБРА ЛОГИКИ
В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ**

Учебно-методическое пособие

по курсу «Дискретные системы управления»

для студентов, обучающихся

по направлению подготовки бакалавров

15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»

Северск 2024

УДК 51(076)
ББК 22.12я73
Л 813

Автор:

Лохтина Л.Н. — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Электрооборудование и автоматизация технологических процессов» СТИ НИЯУ МИФИ.

Логинова Е.С. — кандидат технических наук, доцент кафедры «Электрооборудование и автоматизация технологических процессов» СТИ НИЯУ МИФИ.

Рецензент:

Филипас А.А. — кандидат технических наук, Отделение автоматизации и робототехники (ОАР) ИШИТР ТПУ, доцент, заведующий кафедрой — руководитель отделения на правах кафедры.

Лохтина Л.Н.

Л 813 Алгебра логики в дискретных системах управления: учебно-методическое пособие/Л.Н. Лохтина, Е.С. Логинова; Северский технологический институт НИЯУ МИФИ — Северск: Издательство СТИ НИЯУ МИФИ, 2024. — 90 с. — Текст: электронный.

В пособии изложена терминология в области алгебры логики. Рассмотрены свойства логических функций, методы их минимизации и приведения к нормальным формам. Кроме того, в пособии рассмотрены вопросы практического применения алгебры логики в различных областях. Кроме основных понятий, пособие включает примеры задач-тестов, которые не только дополняют теоретический материал, но и поддерживают самостоятельную работу обучающихся по курсу «Дискретные системы управления». При написании пособия использованы материалы действующих государственных стандартов. Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств»; а также полезно студентам, обучающимся по направлению/специальности подготовки, где изучают дискретные системы управления.

Пособие рассмотрено и одобрено на заседании кафедры «Электрооборудование и автоматизация технологических процессов», рекомендовано к изданию (протокол № 3 от 18 марта 2024 г.).

Рег. № 7/24 от 22.04.2024 г.

Редактор М. В. Ворожейкина

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Северский технологический институт — филиал ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (СТИ НИЯУ МИФИ), 2024 г.

Содержание

Введение	5
1 Импульсные сигналы в системах управления	6
1.1 Общие сведения	6
1.2 Параметры импульсных сигналов	7
2 Позиционные системы счисления	9
2.1 Основные понятия	9
2.2 Функции алгебры логики и их основные свойства	10
2.3 Элементарные функции алгебры логики	13
2.4 Аналитическая запись функций алгебры логики	18
2.5 Аксиомы, основные теоремы и тождества алгебры логики	24
2.6 Минимизация функций алгебры логики	28
2.6.1 Основные определения	28
2.6.2 Постановка задачи минимизации в классе ДНФ	30
2.6.3 Аналитическая минимизация	30
2.6.4 Метод неопределенных коэффициентов и минимизирующих карт	31
2.6.5 Метод минимизирующих карт	34
2.6.6 Карты Карно	36
3 Логические элементы	42
3.1 Общие сведения	42
3.2 Простые логические операции и электронные элементы их реализации	42
3.3 Интегральные логические схемы	47
4 Применение булевой алгебры при моделировании электрических цепей в релейно-контактных схемах	48
4.1 Булевы операции и математическая логика	48
4.2 Булевы операции как основа цифровой техники	48
5 Проверочный материал	53
5.1 Тест 1. Позиционные системы счисления	53
5.2 Тест 2. Табличное представление логических функций	54
5.3 Тест 3. Аналитическое представление логических функций	63
5.4 Тест 4. Аксиомы и законы алгебры логики	67
5.5 Тест 5. Минимизация логических функций	70
5.6 Тест 6. Разработка функциональной схемы логического устройства по аналитическому выражению логической функции	74
Рекомендуемая литература	85
Приложение А (обязательное) Правила чтения формул	87
Приложение Б (обязательное) Равносильные формулы	88
Приложение В (обязательное) Ответы тестов	89

Перечень принятых сокращений

ДСНФ	—	дизъюнктивная совершенная нормальная форма;
КСНФ	—	конъюнктивная совершенная нормальная форма;
МДНФ	—	минимальная дизъюнктивная нормальная форма;
УГО	—	условное графическое обозначение;
ФАЛ	—	функция алгебры логики.

Введение

Одной из особенностей дискретных систем является использование техники с импульсным принципом построения. На базе импульсной техники выполняются системы управления и регулирования, устройства измерения и отображения информации. На ней основана цифровая вычислительная техника. Импульсный принцип построения систем является предпочтительным по сравнению с аналоговым.

В отличие от аналоговых систем, в которых сигналы изменяются непрерывно во времени (например, напряжение изменяется пропорционально измеряемой температуре), в импульсных системах используются сигналы (напряжение, ток) импульсной формы.

Доминирующее применение импульсных систем обусловлено их существенно меньшим потреблением тока (большим к. п. д.), более высокой точностью, меньшей критичностью к изменению температуры, большей помехоустойчивостью. Существенную роль играют также относительная простота средств представления информации в импульсной форме и наличие эффективных способов ее обработки (преобразования) [1, 2, 7].

1 Импульсные сигналы в системах управления

1.1 Общие сведения

Электрическим импульсом называют отклонение напряжения или тока от первоначального значения в течение короткого промежутка времени. Под коротким промежутком понимают интервал времени, соизмеримый с длительностью переходных процессов в устройстве.

В импульсной технике применяются импульсы различной формы. Наиболее распространенными формами импульсов являются следующие:

- импульсы, близкие по форме к прямоугольной;
- импульсы, близкие по форме к пилообразной и экспоненциальной кривым;
- импульсы положительной, отрицательной и чередующейся полярности.

Импульсы перечисленных выше форм представлены на рисунке 1.1 (импульсы, близкие по форме к прямоугольной, пилообразной и экспоненциальной кривым (рисунок 1.1, а–в), а также импульсы положительной, отрицательной и чередующейся полярности (рисунок 1.1, г)) [1, 2, 8].

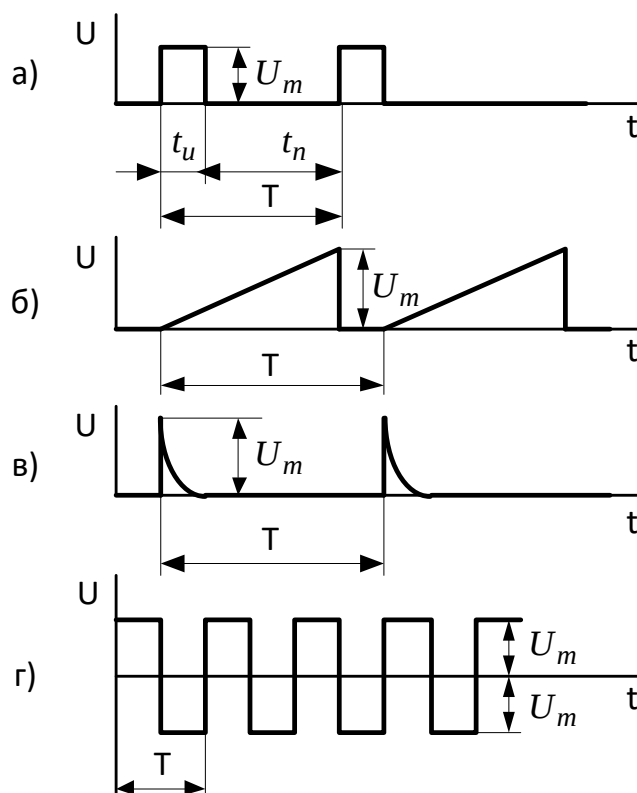


Рисунок 1.1 — Импульсные сигналы прямоугольной (а), пилообразной (б), экспоненциальной (в), прямоугольной с чередующейся полярностью (г) форм

1.2 Параметры импульсных сигналов

Импульсный сигнал характеризуется рядом параметров. Рассмотрим их на примере реального импульса напряжения с формой кривой, близкой к прямоугольной (рисунок 1.2).

Такой сигнал вначале быстро нарастает до максимального значения. Затем напряжение может сравнительно медленно изменяться в течение некоторого промежутка времени, после чего происходит быстрый спад импульса. Характерными участками импульса являются:

- фронт (передний фронт);
- вершина (плоская часть);
- срез (задний фронт).

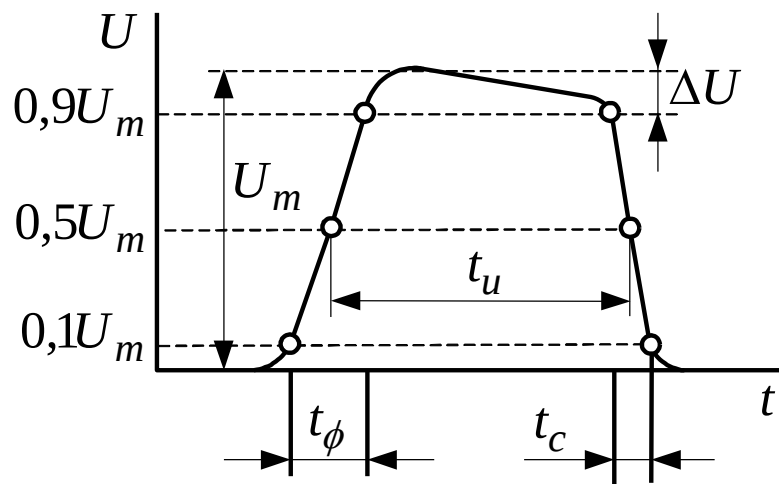


Рисунок 1.2 — Реальный импульс напряжения прямоугольной формы

Параметрами импульса являются амплитуда, длительность, длительность фронта, длительность среза и спад вершины.

Амплитуда импульса U_m определяет наибольшее значение напряжения импульсного сигнала.

Длительность импульса t_u характеризует продолжительность импульса во времени. Ее часто измеряют на уровне, соответствующем половине амплитуды (активная длительность импульса). Иногда длительность импульса определяют на уровне $0,1U_m$. При относительно малых продолжительностях двух крайних участков импульса длительность t_u определяют по его основанию (см. рисунок 1.1, а).

Длительность фронта t_ϕ и длительность среза импульса t_c характеризуют соответственно времена нарастания и спада импульса. Наиболее часто пользуются понятиями активных длительностей фронта и среза, представляющими указанные времена изменения напряжения относительно уровней $0,1U_m$ и $0,9U_m$ (рисунок 1.2) [1, 2, 7].

Длительности t_ϕ и t_c обычно составляют доли процента от длительности t_u . Чем меньше t_ϕ и t_c по сравнению с t_u , тем меньше отличие сигнала от идеального импульса прямоугольной формы.

Спад вершины импульса ΔU и его относительная величина $\Delta U/U_m$ отражают уменьшение напряжения на плоской части импульса. Спад вершины импульса, в частности, создается при прохождении сигнала прямоугольной формы через импульсный усилитель с RC -связями.

Параметрами последовательности импульсов (см. рисунок 1.1, а) являются период повторения (следования), частота повторения, пауза, коэффициент заполнения и скважность.

Периодом повторения импульсов называют интервал времени между соответствующими точками (например, между началами) двух соседних импульсов.

Величину, обратную периоду повторения, называют частотой повторения импульсов: $f = 1/T$.

Паузой t_n называют интервал времени между окончанием одного и началом следующего импульсов: $t_n = T - t_u$.

Коэффициент заполнения γ характеризуется отношением длительности импульсов к периоду их следования: $\gamma = t_u/T$.

Величину, обратную коэффициенту заполнения, называют скважностью импульсов: $q = T/t_u = 1/\gamma$ [1, 3, 7].

Импульсный сигнал (последовательность импульсов) обладает большими информационными возможностями. Для преобразования электрического или неэлектрического параметра в сигнал импульсной формы наибольшее применение получили время-импульсный и число-импульсный методы. Носителем информации в первом случае является длительность импульсов, во втором — число импульсов в фиксированном интервале времени.

В схемах импульсной техники для обработки и преобразования информации широко применяют цифровые методы. Они базируются на использовании сигнала прямоугольной формы, имеющего два фиксированных уровня напряжения. Это позволяет представить сигнал в цифровой форме: уровню высокого напряжения приписывают символ «1», а уровню низкого напряжения — символ «0». На указанном виде сигнала основана, в частности, работа цифровых вычислительных устройств, а также используемая в них двоичная система счисления.

Цифровая форма представления сигнала упрощает рассмотрение импульсных систем и позволяет использовать при их анализе и разработке соответствующий математический аппарат (алгебру логики). Цифровые методы построения и проектирования импульсных систем занимают ведущее место в современной технике.

2 Позиционные системы счисления

2.1 Основные понятия

Совокупность правил записи чисел называется системой счисления. Наиболее часто используются позиционные системы счисления, в которых целое положительное число записывается в виде последовательности символов $e_n e_{n-1} \dots e_p \dots e_2 e_1$, а вес каждого символа e_p определяется его позицией в записи числа. В дальнейшем будут использоваться только позиционные системы счисления, в которых вес символа e_p равен q^{p-1} , где q — основание системы счисления, а $e_p = 0, 1, \dots, q-1$ — символы данной системы счисления. Тогда любое целое положительное число E в системе счисления с основанием q можно записать в виде $E = (e_n \dots e_p \dots e_1)_q = e_n q^{n-1} + \dots + e_p q^{p-1} + \dots + e_1 q^0 = \sum_{p=1}^n e_p q^{p-1}$. При вычислении суммы полагаем, что все значения e_p и q^{p-1} представлены в привычной десятичной системе счисления [4, 5, 10].

Максимальное n -разрядное число получается при $e_p = q-1$ для всех p : $E_{\max} = \sum_{p=1}^n (q-1)q^{p-1}$. Из этого следует, что существует q^n различных n -разрядных чисел (с учетом нуля). В таблице 2.1 показан перевод 16 чисел из одной системы в другую при наиболее часто используемых основаниях систем счисления $q=2, 10, 8, 16$.

Таблица 2.1 — Перевод 16 чисел из одной системы в другую

$q=2$	$q=10$	$q=8$	$q=16$
0 0 0 0	0	0	0
0 0 0 1	1	1	1
0 0 1 0	2	2	2
0 0 1 1	3	3	3
0 1 0 0	4	4	4
0 1 0 1	5	5	5
0 1 1 0	6	6	6
0 1 1 1	7	7	7
1 0 0 0	8	10	8
1 0 0 1	9	11	9
1 0 1 0	10	12	A
1 0 1 1	11	13	B
1 1 0 0	12	14	C
1 1 0 1	13	15	D
1 1 1 0	14	16	E
1 1 1 1	15	17	F

Перевод чисел из системы счисления с произвольным основанием q в десятичную систему счисления ($q=10$) выполняется по приведенным формулам, для чего требуется перевести в десятичную систему счисления только числа e_p и q . Несколько сложнее произвести перевод чисел из десятичной системы счисления в систему счисления с основанием $q \neq 10$. Наиболее просто такой перевод выполняется для $q=2, 8, 16$. Пусть требуется перевести число $(1987)_{10}$ в указанные системы счисления. Перевод осуществляется последовательным делением числа, заданного в десятичной системе счисления, на основание соответствующей системы счисления $q=8$:

$$\begin{array}{cccc}
 1987 & \overline{) 8} & & \\
 \underline{38} & 248 & \overline{) 8} & \\
 67 & 8 & 31 & \overline{) 8} \\
 \underline{3} & 0 & 7 & 3 \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 \text{Вес } 8^0 & 8^1 & 8^2 & 8^3
 \end{array}$$

Таким образом, $(1987)_{10} = (3703)_8$. Для перевода полученного числа в двоичную систему счисления достаточно каждую цифру представить в двоичном коде: $(3703)_8 = (011.111.000.011)_2$. Перевод полученного двоичного числа в 16-ричную систему счисления выполняется его разбиением на тетрады (тетрада — четыре разряда) и переводом каждой тетрады в 16-ричную систему счисления: $(0111.1100.0011)_2 = (7C3)_{16}$. Итак, получили $(1987)_{10} = (3703)_8 = (11111000011)_2 = (7C3)_{16}$ [5, 9].

Для обозначения произвольных десятичных чисел используются символы i, j и тому подобное, а двоичные числа записываются в виде $e_n \dots e_p \dots e_1$, где $e_p = 0$ или 1. Равенства для десятичных и двоичных чисел записываются, опуская индекс, указывающий основание системы счисления $i = e_n \dots e_p \dots e_1$.

2.2 Функции алгебры логики и их основные свойства

Рассмотрим набор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, (2.1)

в котором переменные x_i могут принимать значения 0 или 1. При этом число различных числовых наборов такого вида конечно и равно 2^n (см. таблицу 2.2).

Таблица 2.2 — Таблица состояния (истинности) логической функции $f(x_1, x_2)$

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Определение 1. Функция, определенная на наборах вида (2.1) и принимающая в качестве своих значений на этих наборах 0 или 1, называется функцией алгебры логики (ФАЛ).

Так как число различных наборов значений аргументов является конечным, то любая функция алгебры логики может быть полностью задана конечной таблицей с 2^n строками (таблица 2.2). В левой части этой таблицы перечислены все наборы значений аргументов этой функции, а в правой части — значения функции на этих наборах.

Определение 2. Если две функции алгебры логики $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принимают на всех возможных наборах значений аргументов одинаковые значения, то функции f_1 и f_2 называются равными (эквивалентными).

Факт равенства функций f_1 и f_2 записывается обычным образом:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Определение 3. Функция $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ существенно зависит от аргумента x_i , если имеет место соотношение

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \neq f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

В противном случае говорят, что от x_i функция зависит несущественно и x_i является ее фиктивным аргументом. Функция алгебры логики не изменится, если к ее аргументам дописать любое число фиктивных аргументов или зачеркнуть те аргументы, которые для данной функции являются фиктивными [5, 10].

Пусть функция задана следующей таблицей 2.3 (Пример 1):

Таблица 2.3 — Пример 1

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1

Покажем, что аргумент x_4 для этой функции является фиктивным. Для этого убедимся, что

$$f(x_1, x_2, x_3, 0) = f(x_1, x_2, x_3, 1).$$

Составим таблицу, определяющую функции $f(x_1, x_2, x_3, 0)$ и $f(x_1, x_2, x_3, 1)$.

Таблица 2.4 — Значение функций $f(x_1, x_2, x_3, 0)$ и $f(x_1, x_2, x_3, 1)$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3, 0)$	$f(x_1, x_2, x_3, 1)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3, 0)$	$f(x_1, x_2, x_3, 1)$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1

На основании определений 2 и 3 можно сделать вывод о фиктивности аргумента x_4 .

Теорема 1. Число различных функций алгебры логики, зависящих от n аргументов, конечно и равно 2^{2^n} .

Для доказательства теоремы составим следующую таблицу 2.5.

Таблица 2.5 — Пример теоремы 1

$x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$		$x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0 0 ... 0 0	α_1			.
0 0 ... 0 1	α_2			.
0 0 ... 1 0	α_3		1 1 ... 1 1	α_{2^n}
.....	.			

В этой таблице справа стоит одна из возможных функций алгебры логики $(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_{2^n})$, зависящая от n аргументов. Задавая тот или иной конкретный двоичный набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_{2^n})$, мы будем тем самым задавать одну из возможных функций алгебры логики. Но набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_{2^n})$ является набором вида (2.1) с 2^n переменными. Различное число таких наборов равно 2^{2^n} . Теорема доказана.

2.3 Элементарные функции алгебры логики

В число функций алгебры логики, подсчитываемых с помощью теоремы 1, входят как функции, существенно зависящие от всех n аргументов, так и функции, для которых часть из этих аргументов являются фиктивными.

Теорема 2. Число всех функций алгебры логики, существенно зависящих от n аргументов, определяется следующим рекуррентным соотношением:

$$A_n = 2^{2^n} - C_n^{n-1} A_{n-1} - C_n^{n-2} A_{n-2} - \dots - C_n^1 A_1 - A_0. \quad (2.2)$$

В этом соотношении A_i есть число функций алгебры логики, существенно зависящих от i аргументов. Правая часть соотношения есть разность между числом всех функций алгебры логики и суммой всех функций алгебры логики, зависящих существенно от любого числа аргументов, меньшего чем n . Справедливость приведенного соотношения очевидна [6, 9].

Рассмотрим одиннадцать функций, которые играют большую роль в построении теории функций алгебры логики и ее приложениях. Эти функции называют элементарными.

Рассмотрение множества элементарных функций алгебры логики начнем со случая $n=0$. В силу теоремы 1 в этом случае имеются только две функции, совпадающие с константами 0 и 1:

$$\begin{aligned} f_1 &= 0 \\ f_2 &= 1. \end{aligned}$$

Обе эти функции мы будем считать элементарными.

Для $n=1$, согласно теореме 1, имеем $2^2=4$ различные функции, представленные в таблице 2.6.

Таблица 2.6 — Различные функции для $n=1$

x_1	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

В этом случае только функции f_3 и f_4 существенно зависят от x_1 , а для функций f_1 и f_2 этот единственный аргумент является фиктивным.

Эти две функции определяются таблицей 2.7

Таблица 2.7 — Логические функции повторения и отрицания

x_1	f_3	f_4
0	0	1
1	1	0

Эти две функции также относят к элементарным, их называют функциями повторения и отрицания и записывают следующим образом:

$$f_3 = x,$$

$$f_4 = \bar{x} \quad (\text{читается «не } x\text{»}).$$

Найдем число функций алгебры логики, существенно зависящих от двух и трех переменных.

Из примера (таблица 2.6) вытекает, что $A_0=2$ и $A_1 = 2$. Применяя теорему 2, имеем:

$$A_2 = 2^{2^2} - C_2' A_1 - A_0 = 2^{2^2} - 2 \cdot 2 - 2 = 16 - 6 = 10,$$

$$A_3 = 2^{2^3} - C_3^2 A_2 - C_3' A_1 - A_0 = 256 - 30 - 6 - 2 = 218.$$

В случае $n = 2$ в силу теоремы 2 имеем десять различных функций, существенно зависящих от аргументов x_1 и x_2 . Из этих десяти функций к элементарным функциям относятся следующие семь функций (таблица 2.8):

Таблица 2.8 — Элементарные логические функции двух переменных

x_1	x_2	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Функция f_5 , определяемая этой таблицей, носит название дизъюнкции x_1 и x_2 или логического сложения x_1 и x_2 . Для ее обозначения применяются следующие символы:

$$\begin{aligned} f_5(x_1, x_2) &= x_1 \vee x_2 & \text{и} \\ f_5(x_1, x_2) &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Функцию f_5 называют дизъюнкцией и обозначать дизъюнкцию x_1 и x_2 при помощи символа $+$.

Функция f_6 носит название конъюнкции или логического умножения x_1 и x_2 . Для ее обозначения применяется символ

$$f_6(x_1, x_2) = x_1 \& x_2.$$

Вместо этого символа часто применяют точку или вообще опускают всякий знак между x_1 и x_2 , т. е.

$$f_6(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2.$$

В дальнейшем там, где это необходимо, употребляется для конъюнкции символ $\&$, а в остальных случаях всякий знак между x_1 и x_2 опускается.

Функция f_7 носит название функции эквивалентности или функции равнозначности. Для ее обозначения применяются следующие два символа:

$$\begin{aligned} f_7(x_1, x_2) &= x_1 \equiv x_2 & \text{и} \\ f_7(x_1, x_2) &= x_1 \sim x_2. \end{aligned}$$

Эта функция называется эквивалентностью x_1 и x_2 . Для ее обозначения чаще употребляется первый из двух вышеприведенных символов.

Функция f_8 носит название импликации x_1 в x_2 . Она обозначается следующим образом:

$$f_8(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2.$$

Функция f_9 носит название функции Вебба и обозначается следующим образом:

$$f_9(x_1, x_2) = x_1 \text{O} x_2.$$

Функция f_{10} называется функцией Шеффера и обозначается следующим образом:

$$f_{10}(x_1, x_2) = x_1 / x_2 .$$

Функция f_{11} обычно называется функцией сложения по модулю два (реже ее называют функцией разноименности). Для ее обозначения употребляются символы

$$f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \quad \text{и} \\ f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \Delta x_2 .$$

Для обозначения функции сложения по модулю чаще используется первый символ $\oplus$.

Функции конъюнкции и дизъюнкции обладают рядом свойств, аналогичных свойствам обычных операций умножения и сложения [5, 6].

Легко убедиться в том, что для этих функций имеют место сочетательный:

$$x_1 \& (x_2 \& x_3) = (x_1 \& x_2) \& x_3 ; \\ x_1 V (x_2 V x_3) = (x_1 V x_2) V x_3 ,$$

переместительный:

$$x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1 ; \\ x_1 V x_2 = x_2 V x_1$$

и распределительный законы конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$x_1 \& (x_2 V x_3) = (x_1 \& x_2) V (x_1 \& x_3) .$$

Кроме того, имеет место распределительный закон дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$x_1 \& (x_2 V x_3) = (x_1 \& x_2) V (x_1 \& x_3) ,$$

который не имеет места в обычной алгебре, так как если бы он существовал, то он бы имел следующий вид:

$$a + bc = (a + b)(a + c).$$

Проверим справедливость этого закона путем сравнения таблиц для функций, стоящих в левой и правой частях рассматриваемого соотношения.

Таблица 2.9 — Сравнение таблиц для функций

x_1	x_2	x_3	$x_2 \& x_3$	$x_1 \vee (x_2 \& x_3)$	x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \vee x_3$	$(x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_3)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Совпадение построенных таблиц доказывает наше утверждение [5, 6].

Рассмотрим теперь ряд простых, но весьма важных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} x \vee x &= x, \\ x \& x &= x; \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} x \vee 1 &= 1, \\ x \& 1 &= x; \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} x \vee 0 &= x, \\ x \& 0 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} x \vee \bar{x} &= 1, \\ x \& \bar{x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Из (2.3) как следствие получаем:

$$\begin{aligned} x \vee x \vee \dots \vee x &= x, \\ x \& x \& \dots \& x &= x. \end{aligned}$$

Как обобщение получены следующие формулы, обычно называемые формулами де Моргана:

$$x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = \overline{\overline{x_1} \& \overline{x_2} \& \dots \& \overline{x_n}}, \quad (2.7)$$

$$x_1 \& x_2 \& \dots \& x_n = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n}}. \quad (2.8)$$

Рассмотренные одиннадцать функций позволяют строить новые функции алгебры логики двумя основными путями:

- 1) путем перенумерации аргументов;
- 2) путем подстановки в функцию новых функций вместо аргументов.

Функцию, полученную из функций $f_1, f_2, \dots, f_k$ и путем применения (возможно многократного) этих двух правил, называют суперпозицией функций $f_1, f_2, \dots, f_k$.

Имея, например, элементарные функции отрицания, дизъюнкции, эквивалентности и импликации, можно составить другие функции алгебры логики, являющиеся суперпозициями этих функций. Используя таблицы состояния (истинности), можно задавать в них любую функцию [5, 9, 10].

2.4 Аналитическая запись функций алгебры логики

В этом параграфе изложены универсальные алгоритмы перехода от табличной записи функций алгебры логики к их аналитической записи.

Условимся о ряде обозначений. Введем в рассмотрение «степень» аргумента x , которую будем обозначать x^α . Положим, что

$$x^\alpha = \begin{cases} x, & \alpha = 1, \\ \overline{x}, & \alpha = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Рассмотрим конъюнкцию

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}. \quad (2.10)$$

Двоичный набор $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ есть набор вида (2.1), и существует ровно 2^n различных таких наборов. Таким образом, число различных конъюнкций вида (2.10) также равно 2^n .

Сопоставим каждой конъюнкции (2.10) номер, определяемый номером набора $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$. Тогда запись

$$\bigvee_{i \in \sigma} (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n})_i$$

означает дизъюнкцию всех конъюнкций с номерами из множества σ . Введенный знак $\vee$ является аналогом знака суммы в математике. Аналогично запись

$$\&_{i \in \sigma} (x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \dots \vee x_n^{\alpha_n})_i$$

означает конъюнкцию всех дизъюнкций с номерами из множества σ . Знак $\&$ аналогичен знаку произведения [9, 10].

Вначале покажем, что $x_i^{\alpha_i} = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $x_i = \alpha_i$.

Это вытекает из рассмотрения следующих четырех возможных случаев:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \left. \begin{array}{l} x_i = 0 \\ a_i = 0 \end{array} \right\} x_i^{\alpha_i} = \overline{x_i} = 1. \\ 2) \quad & \left. \begin{array}{l} x_i = 0 \\ a_i = 1 \end{array} \right\} x_i^{\alpha_i} = \overline{x_i} = 0. \\ 3) \quad & \left. \begin{array}{l} x_i = 1 \\ a_i = 0 \end{array} \right\} x_i^{\alpha_i} = \overline{x_i} = 0. \\ 4) \quad & \left. \begin{array}{l} x_i = 1 \\ a_i = 1 \end{array} \right\} x_i^{\alpha_i} = \overline{x_i} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, конъюнкция $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ не обращается в нуль только в том случае, если одновременно выполняются следующие i равенства:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = a_1, \\ x_2 = a_2, \\ \dots \\ x_i = a_i \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 3. Любая функция алгебры логики, зависящая от n аргументов ($n \geq 1$), может быть представлена в следующем виде:

$$f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \bigvee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \dots, x_i^{\alpha_i} f(\alpha_1, \dots, \alpha_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (2.12)$$

Покажем теперь справедливость соотношения (2.12). Для этого докажем, что функции, стоящие в левой и правой частях соотношения (2.12), совпадают на всех наборах значений аргументов. Возьмем произвольный набор $\langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$, на котором функция f обращается в нуль, и подставим его в правую и левую части (2.12). Тогда слева получим нуль. Для всех конъюнкций, стоящих справа, для которых не выполнено (2.11), можно утверждать, что они равны нулю. Для той же единственной ненулевой конъюнкции, для которой выполнено условие (2.11), $f(\alpha_1, \dots, \alpha_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$. Таким образом, в дизъюнкции, стоящей справа, все конъюнкции нулевые и правая часть (2.12) равна нулю.

Рассмотрим теперь набор $\langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$, на котором f обращается в единицу, и подставим его в (2.12). При этом слева получим единицу, а справа все конъюнкции, для которых не выполнено (2.11), дадут нуль. Для конъюнкции, удовлетворяющей (2.11), имеем:

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = 1$$

и, следовательно, в дизъюнкции, стоящей в правой части (2.12), будет одна единица. Этого достаточно для обращения в единицу правой части соотношения (2.12). Теорема доказана.

Из теоремы 3, которая дает разложение произвольной функции алгебры логики по любым i аргументам, вытекает следующая важная теорема [9, 10].

Теорема 4. Любая функция алгебры логики представима в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}. \quad (2.13)$$

Символ $\bigvee_1$ означает, что дизъюнкция берется только по таким наборам $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$, на которых выполняется равенство $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$.

Для всех функций, зависящих от n аргументов ($n \geq 1$), это утверждение следует из теоремы 3. В самом деле, если в (2.12) взять $i = n$, то в силу доказанной теоремы будем иметь:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Функция $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ есть функция алгебры логики. Следовательно, $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ может принимать либо значение, равное нулю, либо

значение, равное единице. При тех же значениях набора $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$, для которых

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

соответствующая конъюнкция

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Учитывая это обстоятельство, можно записать:

$$\overline{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Теорема доказана для всех $n > 1$. Остается еще показать, что в виде соотношения (2.13) можно записать функцию $f = 1$. Справедливость этого утверждения вытекает из

$$1 = x_1 \vee \overline{x_1}.$$

Теорема полностью доказана.

Представление функции алгебры логики в виде (2.13) называют дизъюнктивной совершенной нормальной формой этой функции.

Доказанная теорема дает возможность сформулировать алгоритм перехода от табличного задания функции к записи этой функции в виде дизъюнктивной совершенной нормальной формы (ДСНФ). Этот алгоритм формулируется следующим образом [9, 10]:

1) Выбрать в таблице задания функции все наборы аргументов, на которых функция обращается в единицу.

2) Выписать конъюнкции, соответствующие этим наборам аргументов. При этом, если аргумент x_i входит в данный набор как 1, то он вписывается без изменения в конъюнкцию, соответствующую данному набору. Если же x_i входит в данный набор как 0, то в соответствующую конъюнкцию вписывается его отрицание.

3) Все полученные конъюнкции соединяются между собой знаками дизъюнкции.

Пусть задана функция $f(x_1, x_2, x_3)$ таблицей 2.10:

Таблица 2.10 — Пример функции

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0

Требуется получить для нее дизъюнктивную совершенную нормальную форму.

Для нахождения дизъюнктивной совершенной нормальной формы выбираем из таблицы только те строки, в которых стоят наборы значений аргументов, обращающие функцию в единицу. Это четвертая, пятая и седьмая строки. Выписываем конъюнкции, соответствующие выбранным строкам:

$$\bar{x}_1 x_2 x_3, x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3, x_1 x_2 \bar{x}_3.$$

Соединяя эти конъюнкции знаками дизъюнкций, окончательно получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3.$$

Кроме представления функций алгебры логики в ДСНФ, возможно представление ее в некоторой другой форме, двойственной по отношению к ДСНФ [9, 10].

Теорема 5. Любая функция алгебры логики может быть представлена в следующей форме:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \&_0(\bar{x}_1^{\alpha_1} V \bar{x}_2^{\alpha_2} V \dots V \bar{x}_n^{\alpha_n}). \quad (2.14)$$

Символ $\&_0$ означает, что конъюнкция берется только по тем наборам $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$, для которых выполняется равенство

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Переходим к доказательству соотношения (2.14). В силу теоремы 4 имеем:

$$\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vee_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

или

$$\overline{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \overline{f}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Как известно, равенство не нарушается, если от обеих его частей взять отрицание:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{\vee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \overline{f}(a_1, a_2, \dots, a_n)}.$$

К правой части теперь можно применить соотношение (2.7):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{\& x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \overline{f}(a_1, a_2, \dots, a_n)}.$$

К конъюнкциям $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \overline{f}$ применим формулу де Моргана (2.8):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \&(\overline{x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \dots \vee x_n^{\alpha_n} \vee f(a_1 \dots a_n)}).$$

На тех наборах, для которых

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1,$$

соответствующая дизъюнкция

$$\overline{x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \dots \vee x_n^{\alpha_n} \vee f(a_1, a_2, \dots, a_n)} = 1.$$

Такие наборы в силу (2.4) на значение конъюнкции не влияют, и ими можно пренебречь:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \&_0(\overline{x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \dots \vee x_n^{\alpha_n}}).$$

Теорема доказана для всех $n \geq 1$. Для функции f , тождественно равной нулю, на основании (2.6) имеем:

$$0 = x_1 \overline{x_1}.$$

Теорема полностью доказана.

Представление функции алгебры логики в виде (2.14) носит название конъюнктивной совершенной нормальной формы (КСНФ) [9, 10].

Из теоремы 5 вытекает алгоритм построения КСНФ:

1) Выбрать в таблице задания функции все наборы аргументов, на которых функция обращается в нуль.

2) Выписать дизъюнкции, соответствующие этим наборам аргументов. При этом, если аргумент x_i входит в данный набор как 0, то он вписывается без изменения в дизъюнкцию, соответствующую данному набору. Если же x_i входит в данный набор как 1, то в соответствующую дизъюнкцию вписывается его отрицание.

3) Все полученные дизъюнкции соединяются между собой знаками конъюнкций.

Написать КСНФ для функции, заданной таблицей 2.11.

Таблица 2.11 — Таблица состояния функции

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0

Логическая функция имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \overline{(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})} \overline{(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})}.$$

Как следует из алгоритмов построения ДСНФ и КСНФ, выбор той или иной формы аналитической записи определяется видом таблицы заданной функции. Если большинство значений данной функции нулевые, то выгодно записывать ее в ДСНФ, в противном случае более экономную запись дает КСНФ [9, 10].

2.5 Аксиомы, основные теоремы и тождества алгебры логики

В алгебре логики рассматриваются переменные, которые могут принимать только два значения: 0 и 1. В дальнейшем переменные будем обозначать латинскими буквами $x, y, z, \dots$. В алгебре логики определено *отношение эквивалентности* ($=$) и три операции: *дизъюнкция* (операция ИЛИ), обозначаемая знаком $\vee$ (+); *конъюнкция* (операция И), обозначаемая точкой, которую можно опускать (например, $x \cdot y = xy$); *отрицание* (инверсия, операция НЕ), обозначаемое чертой над переменными или элементами 0 и 1 (например, $\overline{x}, \overline{0}, \overline{1}$).

Отношение эквивалентности удовлетворяет следующим свойствам:

- $x = x$ — рефлексивность;
- если $x = y$, то $y = x$ — симметричность;
- если $x = y$ и $y = z$, то $x = z$ — транзитивность.

Из отношения эквивалентности следует *принцип подстановки*: если $x=y$, то в любой формуле, содержащей x , вместо x можно подставить y , и будет получена эквивалентная формула.

Алгебра логики определяется следующей системой аксиом:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0, \text{ если } x \neq 1, \\ x = 1, \text{ если } x \neq 0; \end{array} \right\} \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \vee 1 = 1, \\ 0 \cdot 1 = 0; \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \vee 0 = 0, \\ 1 \cdot 1 = 1; \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1, \\ 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0; \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{0} = 1, \\ \bar{1} = 0. \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

Аксиома (2.15) утверждает, что в алгебре логики рассматриваются только двоичные переменные, аксиомы (2.16)–(2.18) определяют операции дизъюнкции и конъюнкции, а аксиома (2.19) — операцию отрицания. Если в аксиомах (2.16)–(2.19), заданных парами, произвести взаимную замену операций дизъюнкции и конъюнкции, и также элементов 0 и 1, то из одной аксиомы пары получится другая. Это свойство называется *принципом двойственности* [9, 10].

С помощью аксиом алгебры логики можно доказать целый ряд теорем и тождеств. Одним из эффективных методов доказательства теорем является *метод перебора* всех значений переменных. Если теорема истинна, то с учетом (2.16)–(2.19) при подстановке любых значений переменных в обе части выражения, формулирующего утверждение теоремы, должно получиться тождество. Метод перебора не слишком трудоемок, так как переменные могут иметь только два значения: 0 и 1. Так, методом перебора легко убедиться в справедливости следующих теорем:

идемпотентные законы

$$\left. \begin{array}{l} x \vee x = x, \\ x \cdot x = x; \end{array} \right\} \quad (2.20)$$

коммутативные законы

$$\left. \begin{aligned} x \vee y &= y \vee x, \\ x \cdot y &= y \cdot x; \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

ассоциативные законы

$$\left. \begin{aligned} (x \vee y) \vee z &= x \vee (y \vee z), \\ (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z); \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

дистрибутивные законы

$$\left. \begin{aligned} x(y \vee z) &= x \cdot y \vee x \cdot z, \\ x \vee y \cdot z &= (x \vee y) \cdot (x \vee z); \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

законы отрицания

$$\left. \begin{aligned} x \vee \bar{x} &= 1, \\ x \cdot \bar{x} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 \vee x &= x, \\ 1 \cdot x &= x; \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 \vee x &= 1, \\ 0 \cdot x &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

законы двойственности (теоремы де Моргана)

$$\left. \begin{aligned} \overline{x \vee y} &= \bar{x} \cdot \bar{y}, \\ \overline{x \cdot y} &= \bar{x} \vee \bar{y}; \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

закон двойного отрицания

$$\overline{(\bar{x})} = \bar{\bar{x}} = x; \quad (2.28)$$

законы поглощения

$$\left. \begin{aligned} x \vee x \cdot y &= x, \\ x(x \vee y) &= x; \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

операции склеивания

$$\left. \begin{aligned} x \cdot y \vee x \cdot \bar{y} &= x, \\ (x \vee y) \cdot (x \vee \bar{y}) &= x; \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

операции обобщенного склеивания

$$\left. \begin{aligned} x \cdot y \vee \bar{x} \cdot z \vee yz &= x \cdot y \vee \bar{x} \cdot z, \\ (x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee z) \cdot (y \vee z) &= (x \vee y)(\bar{x} \vee z); \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

$$\left. \begin{aligned} x \vee \bar{x} \cdot y &= x \vee y, \\ x \cdot (\bar{x} \vee y) &= xy. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Теоремы (2.20)–(2.27) и (2.29)–(2.32) записаны парами, причем каждая из теорем пары является двойственной другой, так как из одной теоремы пары можно получить другую на основании принципа двойственности, т. е. путем взаимной замены операций дизъюнкции и конъюнкции, а также элементов 0 и 1, если они имеются. Теорема (2.28) самодвойственна, так как она не изменяется по принципу двойственности (отсутствуют элементы 0 и 1 и операции дизъюнкции и конъюнкции).

Если в логическое выражение входят операции дизъюнкции и конъюнкции, то следует соблюдать порядок выполнения операций: сначала выполняется операция конъюнкции, а затем операция дизъюнкции. В сложных логических выражениях для задания порядка выполнения операций используются скобки [9, 10].

Некоторые теоремы и тождества алгебры логики имеют особое значение, так как позволяют упрощать логические выражения. Например, в соотношениях (2.20), (2.24)–(2.26), (2.29)–(2.32) правая часть проще левой. Поэтому, произведя в логических выражениях соответствующие преобразования, можно добиться существенного их упрощения. Особенно часто для преобразования логических выражений, с целью их упрощения, используются тождества (2.29)–(2.32).

Операция сумма по модулю два (исключающее ИЛИ, логическая неравнозначность) обозначается символом $\oplus$ и определяется соотношением

$$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y} = (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y). \quad (2.33)$$

Используя аксиомы алгебры логики, легко убедиться, что:

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0; 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1. \quad (2.34)$$

Из соотношений следует, что значение $x \oplus y$ совпадает со значением младшего разряда суммы двух двоичных чисел, где x и y — значения младших разрядов этих чисел. Соответственно этому значение i -го разряда суммы двух двоичных чисел будет определяться значением $x_i \oplus y_i \oplus z_i$; где x_i и y_i — значения i -х разрядов двоичных чисел, а z_i — перенос в i -й разряд из предыдущего $(i-1)$ -го разряда.

Операция сумма по модулю два коммутативна, ассоциативна и дистрибутивна относительно операции конъюнкции, т. е.

$$\left. \begin{aligned} x \oplus y &= y \oplus x, x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z, \\ x(y \oplus z) &= xy \oplus xz. \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Для операции сумма по модулю два справедливы также следующие тождества:

$$\left. \begin{aligned} x \oplus 0 &= x; x \oplus 1 = \bar{x}; x \oplus x = 0; x \oplus \bar{x} = 1; \\ \overline{x \oplus y} &= \bar{x}\bar{y} \vee xy = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y}) = \bar{x} \oplus y = x \oplus \bar{y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

2.6 Минимизация функций алгебры логики

2.6.1 Основные определения

Минимизация (упрощение формы записи) функции является важной операцией при синтезе логической схемы, так как благодаря предварительно проведенной минимизации схема реализуется с наименьшим числом элементов.

Ранее показано, что любая функция алгебры логики может быть записана в виде ДСНФ или КСНФ. Покажем теперь, что такая запись в ряде случаев является неэкономной, для чего рассмотрим следующий пример.

Пусть задана ДСНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3.$$

Преобразуем эту ДСНФ следующим образом. Добавим еще один конъюнктивный член $x_1x_2x_3$. Это добавление не меняет данной функции, так как

$$x \vee x = x;$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3.$$

Теперь преобразуем это выражение, используя сочетательное и распределительное свойства конъюнкции и дизъюнкции:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2(x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_1\bar{x}_2(x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_2x_3(x_1 \vee \bar{x}_1).$$

Используя свойство дизъюнкции $x \vee \bar{x} = 1$, получим:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3.$$

Аналогично предыдущему делаем дальнейшие преобразования:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_2x_3 = x_1 \vee x_2x_3.$$

Из примера видна неэкономичность совершенных нормальных форм для представления функций алгебры логики. Проблема простейшего представления функций сводится к проблеме выбора базиса (функционального элемента для реализации) и проблеме наиболее экономного представления функций в этом базисе. В настоящее время существенные результаты в решении задачи минимизации получены лишь для базиса, состоящего из отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Для уточнения постановки задачи о минимизации дадим ряд определений [9, 10].

Определение 4. Конъюнкция $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ называется элементарной, если в этой конъюнкции каждое переменное встречается не более одного раза.

Определение 5. Рангом элементарной конъюнкции называется число букв, образующих эту конъюнкцию.

Определение 6. Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

Определение 7. Дизъюнктивная нормальная форма для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, состоящая из конъюнкций ранга n , называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой.

Из этого определения следует, что в ДСНФ входят конъюнкции наибольшего возможного для данной функции ранга. Поэтому с точки зрения ранга конъюнкций, входящих в ДНФ, ДСНФ является наиболее сложной.

Определение 8. Длиной ДНФ назовем число элементарных конъюнкций, образующих эту ДНФ. Длину ДНФ будем обозначать буквой L .

Определение 9. Дизъюнктивная нормальная форма, имеющая наименьшую длину по сравнению со всеми другими ДНФ, эквивалентными данной функции, называется кратчайшей ДНФ (КДНФ).

Определение 10. Дизъюнктивная нормальная форма, содержащая наименьшее число букв $x_i^{\alpha_i}$ по сравнению со всеми другими ДНФ, эквивалентными данной функции, называется минимальной ДНФ (МДНФ).

Определения, аналогичные определениям 4–10, можно дать и для случая конъюнктивных нормальных форм. В дальнейшем ограничимся рассмотрением класса дизъюнктивных нормальных форм. При необходимости читатель сам может повторить все нижеследующие утверждения для случая конъюнктивных нормальных форм.

Еще раз подчеркнем, что рассматриваем лишь класс аналитических представлений для функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемый общей формулой

$$f = \bigvee_1 \gamma_i, \quad (2.37)$$

где γ_i представляет собой элементарные конъюнкции (контермы) различных рангов.

2.6.2 Постановка задачи минимизации в классе ДНФ

На первом этапе однозначно по данной функции строится СДНФ, а на втором этапе, выбрасывая из СДНФ лишние максимальные интервалы, находим МДНФ. В отличие от первого этапа второй этап неоднозначен. Эта неоднозначность нахождения МДНФ определяется двумя факторами: во-первых, для данной функции может существовать несколько МДНФ, во-вторых, само выбрасывание максимальных интервалов делается на основании перебора [6, 9, 10].

2.6.3 Аналитическая минимизация

Выявить и устранить избыточность в записи функции можно путем ее преобразований с использованием аксиом, законов, тождеств и теорем

алгебры логики. Однако такие преобразования требуют громоздких выкладок и связаны с большой затратой времени.

Выполняется в соответствии с основными теоремами алгебры логики, приведенными в разделе 2.4.

2.6.4 Метод неопределенных коэффициентов и минимизирующих карт

Описываемые здесь методы могут быть применены для минимизации функций алгебры логики от любого числа аргументов, однако для простоты изложения и большей наглядности рассмотрение их будем производить на примере минимизации функции, зависящей от трех аргументов.

Наиболее простым по своим идеям является метод неопределенных коэффициентов [5, 9, 12].

Представим функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ в виде следующей ДНФ (2.38, 2.39).

Здесь представлены все возможные конъюнктивные члены, которые могут входить в дизъюнктивную форму представления $f(x_1, x_2, x_3)$. Коэффициенты K с различными индексами являются неопределенными и подбираются так, чтобы получающаяся после этого дизъюнктивная форма была минимальной. Если теперь задавать всевозможные наборы значений аргументов $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, расписать для каждого набора уравнение через коэффициенты (приняв контермы, входящие в (2.38), единичному значению) и приравнивать полученное после этого выражение значению функции на данных наборах, то получим систему 2^3 уравнений (2.39) для определения коэффициентов K .

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3) = & K_1^1 x_1 \vee K_1^0 \overline{x_1} \vee K_2^1 x_2 \vee K_2^0 \overline{x_2} \vee \\
 & \vee K_3^1 x_3 \vee K_3^0 \overline{x_3} \vee K_{12}^{11} x_1 x_2 \vee K_{12}^{10} x_1 \overline{x_2} \vee \\
 & \vee K_{12}^{01} \overline{x_1} x_2 \vee K_{12}^{00} \overline{x_1} \overline{x_2} \vee K_{13}^{11} x_1 x_3 \vee \\
 & \vee K_{13}^{10} x_1 \overline{x_3} \vee K_{13}^{01} \overline{x_1} x_3 \vee K_{13}^{00} \overline{x_1} \overline{x_3} \vee K_{23}^{11} x_2 x_3 \vee \\
 & \vee K_{23}^{10} x_2 \overline{x_3} \vee K_{23}^{01} \overline{x_2} x_3 \vee K_{23}^{00} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee K_{123}^{111} x_1 x_2 x_3 \vee \\
 & \vee K_{123}^{110} x_1 x_2 \overline{x_3} \vee K_{123}^{101} x_1 \overline{x_2} x_3 \vee K_{123}^{100} x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \\
 & \vee K_{123}^{011} \overline{x_1} x_2 x_3 \vee K_{123}^{010} \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \\
 & \vee K_{123}^{001} \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee K_{123}^{000} \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\left. \begin{aligned}
K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} &= f(1,1,1); \\
K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} &= f(1,1,0); \\
K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} &= f(1,0,1); \\
K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} &= f(1,0,0); \\
K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} &= f(0,1,1); \\
K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} &= f(0,1,0); \\
K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001} &= f(0,0,1); \\
K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} &= f(0,0,0).
\end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Пусть таблично задана некоторая функция $f(x_1, x_2, x_3)$. Задание некоторой конкретной функции определяет значения правых частей системы (2.39). Если набор $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ таков, что функция на этом наборе равна нулю, то в правой части соответствующего уравнения будет стоять нуль. Для удовлетворения этого уравнения необходимо приравнять нулю все коэффициенты K , входящие в левую часть рассматриваемого уравнения. Это вытекает из того, что дизъюнкция равна нулю только тогда, когда все члены, входящие в нее, равны нулю.

Рассмотрев все наборы, на которых данная функция обращается в нуль, получим условие формирования нулевых значений для коэффициентов K . В уравнениях, в которых справа стоят единицы, вычеркнем слева все коэффициенты с нулевыми значениями. Из оставшихся в уравнении коэффициентов приравняем единице только один коэффициент, определяющий конъюнкцию возможного наименьшего ранга, а остальные коэффициенты в левой части данного уравнения примем равными нулю (эти действия справедливы, так как дизъюнкция обращается в единицу, если хотя бы один член ее равен единице). Единичные коэффициенты K_i определяют из (2.38) соответствующую ДНФ.

Рассмотрим пример.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}.$$

Составляем систему (2.39).

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1^1 VK_2^1 VK_3^1 VK_{12}^{11} VK_{13}^{11} VK_{23}^{11} VK_{123}^{111} = 1; \\ K_1^1 VK_2^1 VK_3^0 VK_{12}^{11} VK_{13}^{10} VK_{23}^{10} VK_{123}^{110} = 1; \\ K_1^1 VK_2^0 VK_3^1 VK_{12}^{10} VK_{13}^{11} VK_{23}^{01} VK_{123}^{101} = 1; \\ K_1^1 VK_2^0 VK_3^0 VK_{12}^{10} VK_{13}^{10} VK_{23}^{00} VK_{123}^{100} = 1; \\ K_1^0 VK_2^1 VK_3^1 VK_{12}^{01} VK_{13}^{01} VK_{23}^{11} VK_{123}^{011} = 0; \\ K_1^0 VK_2^1 VK_3^0 VK_{12}^{01} VK_{13}^{00} VK_{23}^{10} VK_{123}^{010} = 0; \\ K_1^0 VK_2^0 VK_3^1 VK_{12}^{00} VK_{13}^{01} VK_{23}^{01} VK_{123}^{001} = 0; \\ K_1^0 VK_2^0 VK_3^0 VK_{12}^{00} VK_{13}^{00} VK_{23}^{00} VK_{123}^{000} = 1. \end{array} \right.$$

Из пятого, шестого и седьмого уравнений в силу свойств дизъюнкции вытекает, что

$$K_1^0 = K_2^0 = K_2^1 = K_3^0 = K_3^1 = K_{12}^{00} = K_{12}^{01} = K_{13}^{00} = K_{13}^{01} = K_{23}^{01} = K_{23}^{10} = K_{23}^{11} = K_{123}^{001} = K_{123}^{010} = K_{123}^{011} = 0.$$

После этого данная система примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1^1 VK_{12}^{11} VK_{13}^{11} VK_{123}^{111} = 1; \\ K_1^1 VK_{12}^{11} VK_{13}^{10} VK_{123}^{110} = 1; \\ K_1^1 VK_{12}^{10} VK_{13}^{11} VK_{123}^{101} = 1; \\ K_1^1 VK_{12}^{10} VK_{13}^{10} VK_{23}^{00} VK_{123}^{100} = 1; \\ K_{23}^{00} VK_{123}^{000} = 1. \end{array} \right.$$

Приравняем нулю в каждом уравнении все коэффициенты, кроме тех, которые отвечают конъюнкциям, содержащим наименьшее число переменных:

$$K_{12}^{11} = K_{12}^{10} = K_{13}^{11} = K_{13}^{10} = K_{123}^{111} = K_{123}^{110} = K_{123}^{101} = K_{123}^{100} = K_{123}^{000} = 0.$$

После этого получаем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1^1 = 1; \\ K_1^1 = 1; \\ K_1^1 = 1; \\ K_1^1 VK_{23}^{00} = 1; \\ K_{23}^{00} = 1. \end{array} \right.$$

Отсюда находим МДНФ для данной функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

2.6.5 Метод минимизирующих карт

Метод минимизирующих карт (Гарвардский метод) по существу представляет собой тот же метод неопределенных коэффициентов, только записанный в более удобной форме для работы при ручном способе минимизации [5, 9, 12].

Пусть функция $f(x_1, x_2, x_3)$ задана в виде ДСНФ. Тогда составим следующую таблицу 2.12:

Таблица 2.12 — Вспомогательная таблица

x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$
x_1	x_2	$\bar{x}_3$	$x_1 x_2$	$x_1 \bar{x}_3$	$x_2 \bar{x}_3$	$x_1 x_2 \bar{x}_3$
x_1	$\bar{x}_2$	x_3	$x_1 \bar{x}_2$	$x_1 x_3$	$\bar{x}_2 x_3$	$x_1 \bar{x}_2 x_3$
x_1	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$x_1 \bar{x}_2$	$x_1 \bar{x}_3$	$\bar{x}_2 \bar{x}_3$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
$\bar{x}_1$	x_2	x_3	$\bar{x}_1 x_2$	$\bar{x}_1 x_3$	$x_2 x_3$	$\bar{x}_1 x_2 x_3$
$\bar{x}_1$	x_2	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_3$	$x_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$
$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	x_3	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_3$	$\bar{x}_2 x_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$
$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_3$	$\bar{x}_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

Эта таблица представляет более компактную запись системы уравнений (2.39). Только вместо коэффициентов K в соответствующие клетки таблицы записаны сами конъюнкции.

Покажем теперь, что если в ДСНФ функции не входит какая-либо из восьми конъюнкций последнего столбца, то в МДНФ этой функции не может входить ни одна из конъюнкций соответствующей строки таблицы.

Пусть, например, в ДСНФ функции не входит конъюнкция $\bar{x}_1 x_2 x_3$. Покажем тогда, что в МДНФ не может входить член x_3 (аналогично для других конъюнкций строки)

$$x_3 = x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 = x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3.$$

Таким образом, если бы в МДНФ входил член с x_3 то в ДСНФ входил бы член $\bar{x}_1 x_2 x_3$, что противоречит условию.

Итак, основное свойство вышеприведенной таблицы установлено. С помощью этой таблицы, которая носит название минимизирующей карты, по ДСНФ некоторой функции находится ее МДНФ по следующим правилам:

а) все строки таблицы, которые соответствуют конъюнкциям правого столбца, отсутствующим в ДСНФ рассматриваемой функции, вычеркиваются;

б) в каждом столбце в оставшихся после этого строках вычеркиваются все элементы, попавшие в вычеркнутые ранее строки;

в) в каждой из невычеркнутых строк выбирается незачеркнутая конъюнкция, содержащая минимальное число членов;

г) взяв по одной конъюнкции из всех невычеркнутых строк, соединив все их знаками дизъюнкций и приведя подобные члены, мы получим МДНФ.

x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$
$\bar{x}_1$	x_2	$\bar{x}_3$	$x_1 x_2$	$x_1 \bar{x}_3$	$x_2 \bar{x}_3$	$x_1 x_2 \bar{x}_3$
$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	x_3	$x_1 \bar{x}_2$	$x_1 x_3$	$\bar{x}_2 x_3$	$x_1 \bar{x}_2 x_3$
x_1	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$x_1 \bar{x}_2$	$x_1 \bar{x}_3$	$\bar{x}_2 x_3$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
$\bar{x}_1$	x_2	x_3	$\bar{x}_1 x_2$	$\bar{x}_1 x_3$	$x_2 x_3$	$\bar{x}_1 x_2 x_3$
$\bar{x}_1$	x_2	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_3$	$x_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$
$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	x_3	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_3$	$\bar{x}_2 x_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$
$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \bar{x}_3$	$\bar{x}_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$

Рисунок 2.1 — Минимизирующая карта

Пункт в) этих правил показывает, что построение по ДСНФ соответствующей МДНФ есть процесс неоднозначный, так как выбор минимальных конъюнкций в строках не детерминирован. Однако все получаемые результаты будут «одинаково минимальны».

Рассмотрим пример минимизации функции, ДСНФ которой имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Строим для этой функции минимизирующую карту (рисунок 2.1).

По вышеприведенным правилам получаем следующую минимальную дизъюнктивную нормальную форму:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

Рассмотрим еще один пример минимизации функции:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3.$$

$\bar{x}_1$	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$
x_1	x_2	$\bar{x}_3$	x_1x_2	$x_1\bar{x}_3$	$x_2\bar{x}_3$	$x_1x_2\bar{x}_3$
x_1	$\bar{x}_2$	x_3	$x_1\bar{x}_2$	x_1x_3	$\bar{x}_2x_3$	$x_1\bar{x}_2x_3$
x_1	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	x_1x_2	$x_1\bar{x}_3$	$\bar{x}_2x_3$	$x_1x_2\bar{x}_3$
x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1x_2$	$\bar{x}_1x_3$	x_2x_3	$\bar{x}_1x_2x_3$
$x_1\bar{x}_1$	x_2	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_1x_2$	$\bar{x}_1x_3$	$x_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$
$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	x_3	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1x_3$	$\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$
$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_3$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$

Рисунок 2.2 — Минимизирующая карта

Минимизирующая карта для этой функции имеет следующий вид (рисунок 2.2).

Из этого примера следует, что минимизируемая функция имеет две МДНФ. Для получения одной из них необходимо взять из карты конъюнкции, обведенные сплошной рамкой, а для другой — конъюнкции, обведенные пунктирной рамкой. Эти минимальные формы представляются следующим образом:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3$$

и

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3.$$

Методы минимизирующих карт и неопределенных коэффициентов характеризуются тем, что для минимизируемой функции выписываются все возможные конъюнкции, которые могут входить в ДНФ этой функции. Это приводит к громоздкости записи при использовании таких методов для функций с большим числом аргументов. Число строк минимизирующей таблицы (или число уравнений в системе (2.39)) равно 2^n , а число столбцов таблицы (число членов в левой части системы (2.39), равно 2^{n-1} . Это показывает, что уже для n порядка восьми-девяи использование этих методов становится практически невозможным.

2.6.6 Карты Карно

Современная алгебра логики располагает рядом приемов, разработанных на основе ее правил, позволяющих производить минимизацию функции более просто, быстро и безошибочно. Для минимизации функции с числом переменных до пяти-шести наиболее удобным является метод карт Карно [5, 9, 12].

Карта Карно (рисунок 2.3, а–в) представляет собой графическое изображение значений всех возможных комбинаций переменных. Иными

словами, карту Карно можно рассматривать как графическое представление всех контермов заданного числа переменных.

Каждый контерм изображается на карте в виде клетки. Карта образуется путем такого расположения клеток, при котором контермы соседних клеток отличаются только значением одной переменной. В связи с указанным соседними считаются также крайние клетки каждого столбца или строки. Символ «1» характеризует прямое значение переменной, а «0» — ее инверсное значение.

Контермы минимизируемой функции отмечают единицами в соответствующих клетках карты. Контермы, не входящие в функцию, отмечают в клетках нулями или оставляют клетки пустыми. На основании законов алгебры логики два контерма, находящиеся в соседних клетках, могут быть заменены одним логическим произведением, содержащим на одну переменную меньше. Если соседними являются две пары контермов, то такая группа из четырех контермов может быть заменена одним произведением, содержащим уже на две переменные меньше, и т. д. В общем случае наличие единиц в 2^n соседних клетках позволяет исключить n переменных. В этом и заключается метод минимизации с применением карт Карно [5, 9, 12].

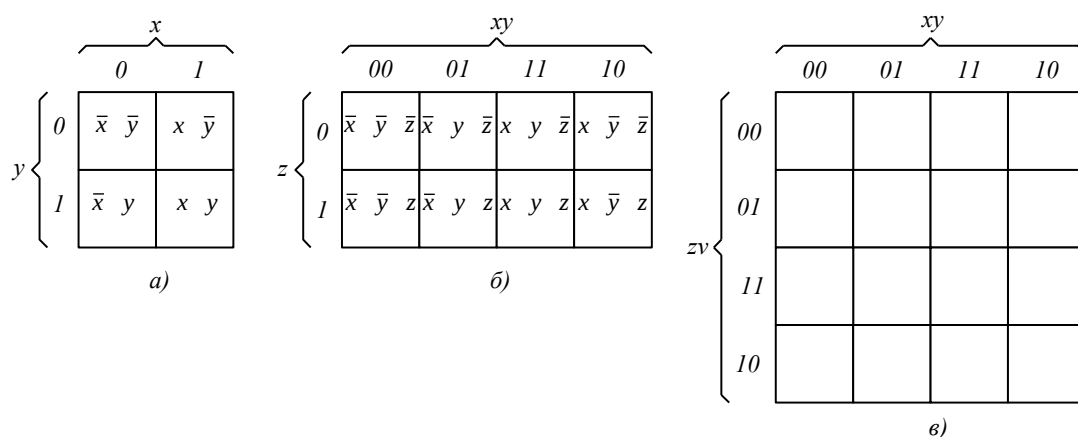


Рисунок 2.3 — Карта Карно функции для двух (а), трех (б) и четырех (в) переменных

Рассмотрим процесс минимизации на примере четырех переменных x, y, z, v функции, заданной следующим логическим выражением:

$$F = yzv + \bar{x}yv + \bar{y}zv + \bar{x}yz + \bar{x}zv + \bar{y}zv + \bar{y}zv.$$

С помощью простейших преобразований представим эту функцию в виде ДСНФ:

$$\begin{aligned} F &= yzv(x + \bar{x}) + \bar{x}yv(z + \bar{z}) + \bar{y}zv(x + \bar{x}) + \bar{x}yz(v + \bar{v}) + \bar{x}zv(y + \bar{y}) + \bar{y}zv(x + \bar{x}) + \\ &+ \bar{y}zv(x + \bar{x}) = xyzv + \bar{x}yzv + \bar{x}yzv + \bar{x}yzv + \bar{x}yzv + \bar{x}yzv + \bar{x}yzv + \\ &+ \bar{x}yzv + \bar{x}yzv + \bar{x}yzv + \bar{x}yzv + \bar{x}yzv + \bar{x}yzv + \bar{x}yzv + \bar{x}yzv. \end{aligned}$$

После исключения повторяющихся членов функция принимает вид:

$$F = xyzv + \bar{x}yzv + \bar{x}y\bar{z}v + \bar{x}y\bar{z}\bar{v} + \bar{x}yz\bar{v} + \bar{x}y\bar{z}v + \bar{x}yzv + \bar{x}y\bar{z}v + \bar{x}y\bar{z}v + \bar{x}y\bar{z}v + \bar{x}y\bar{z}v.$$

Функция состоит из 11 контермов, в связи с чем на карте Карно (рис. 2.4) ее будут представлять 11 клеток, отмеченных единицами.

Так, например, первый контерм функции $xyzv$ будет отображаться клеткой, имеющей координаты xu и zv , соответственно с значениями 11 и 11. Пять клеток карты остаются свободными.

Затем на карте Карно необходимо определить соседние контермы (клетки) и объединить их в минимальное количество групп соседних контермов (клеток). Для наглядности выделенные группы соседних клеток показывают сплошными линиями. Минимальное количество групп соседних контермов для рассматриваемой функции будет равно трем.

		xu			
		00	01	11	10
zv	00	1			1
	01	1	1	1	1
	11	1	1	1	1
	10		1		

Рисунок 2.4 — Карта Карно функции

В первую группу входят две нижние клетки второго столбца слева с контермами $\bar{x}yzv$ и $\bar{x}yz\bar{v}$.

В соответствии с (2.6) имеем

$$\bar{x}yzv + \bar{x}yz\bar{v} = \bar{x}yz(v + \bar{v}) = \bar{x}yz,$$

т. е. переменная v из этой группы может быть исключена.

Вторая группа состоит из двух пар верхних клеток крайних столбцов, определяющих контермы $\bar{x}yz\bar{v}$, $\bar{x}yzv$ и $x\bar{y}\bar{z}\bar{v}$, $x\bar{y}\bar{z}v$. Сумма этих контермов дает

$$\bar{y}\bar{z}(\bar{x}\bar{v} + \bar{x}v + x\bar{v} + xv) = \bar{y}\bar{z}[\bar{x}(\bar{v} + v) + x(\bar{v} + v)] = \bar{y}\bar{z},$$

т. е. из группы исключаются две переменные: x и v .

Третья группа состоит из восьми клеток второй и третьей строк, для которых $v=1$, а переменные x, y, z входят с прямыми и инверсными значениями, в связи с чем переменные x, y, z из этой группы могут быть исключены. Сумма контермов обеих строк будет равна v .

На основании проведенных операций получаем минимальную функцию, выраженную в ДНФ:

$$F = \bar{x}yz + \bar{y}\bar{z} + v.$$

Карта Карно позволяет также провести минимизацию той же функции по нулевым значениям контермов, находящихся в пустых клетках карты (рисунок 2.4) и определяющих нулевое значение функции, т. е. ее инверсное значение $\bar{F}$. Порядок проведения минимизации сохраняется прежним. Минимизирующие контуры, охватывающие соседние клетки с нулевым значением контермов рассматриваемой функции, показаны на рисунке 1.11 пунктиром. Из карты Карно находим

$$\bar{F} = \bar{x}\bar{y}\bar{z}v + y\bar{z}\bar{v} + xz\bar{v} + x\bar{y}v.$$

Воспользовавшись инверсным преобразованием, находим минимальную функцию, выраженную в КНФ, равносильную ДНФ:

$$F = (x + y + \bar{z} + v)(\bar{y} + z + v)(\bar{x} + \bar{z} + v)(\bar{x} + \bar{y} + v).$$

Минимизация функции в ДНФ или КНФ равноправна [5, 9, 12].. Представление результата минимизации в ДНФ или КНФ зависит от вида функции и состава используемых логических элементов для реализации. Реализация функции в ДНФ требует преимущественного использования логических элементов И (И–НЕ), а в КНФ — логических элементов ИЛИ (ИЛИ–НЕ). При использовании логических элементов И (И–НЕ) логическую функцию целесообразно представить в виде произведения переменных, а логических элементов ИЛИ (ИЛИ–НЕ) — в виде суммы переменных. *Задачу решают, воспользовавшись правилом двойной инверсии и теоремой де Моргана.* Для полученной функции в примере соответственно имеем:

$$F = \overline{\overline{x} \overline{y} \overline{z} \overline{y} \overline{z} \overline{v}}, \quad F = \overline{x + y + \bar{z} + v + \bar{y} + z + v + \bar{x} + \bar{z} + v + \bar{x} + \bar{y} + v}.$$

В качестве примеров определим минимальные функции в ДНФ и КНФ, представленные в виде карт Карно для трех переменных (рисунок 1.12) и четырех переменных (рисунок 1.13).

		xy			
		00	01	11	10
z	0	1			1
	1	1	1	1	1

Рисунок 2.5 — Карта Карно функции

		xy			
		00	01	11	10
zv	00	1	1	1	1
	01	1	1	1	1
	11				
	10	1		1	

Рисунок 2.6 — Карта Карно функции

При нахождении минимальной функции в ДНФ, представленной картой Карно на рисунке 2.5, группировочные контуры должны охватывать контермы крайних столбцов 1 и 4 (первый контур) и контермы нижней строки (второй контур).

В первой группе контермов результат не зависит от значений x и z , так как они могут принимать либо состояние «0», либо состояние «1». Переменные x и z можно исключить. В итоге первое слагаемое определяемой минимальной функции равно $\bar{y}$. Во второй группе контермов результат не зависит от значений x и y , следовательно, второе слагаемое определяется переменной z . Таким образом, имеем минимальную функцию в ДНФ:

$$F_1 = \bar{y} + z,$$

или

$$F_1 = \overline{yz}.$$

Минимальную функцию в инверсном виде находят из группировки двух пустых клеток карты:

$$\bar{F}_1 = y \cdot \bar{z},$$

откуда

$$F_1 = \bar{y} + z,$$

т. е. дизъюнктивная и конъюнктивная минимальные формы рассмотренной функции совпадают.

Для получения минимальной функции в ДНФ, представленной картой Карно на рисунке 2.6, необходимо составить три минимизирующих контура.

В первый контур входят нижняя и верхняя клетки крайнего левого столбца, откуда находим первое слагаемое минимальной функции $\bar{x} \bar{y} \bar{v}$.

Второй контур состоит из верхней и нижней клеток второго столбца справа, откуда определяем второе слагаемое $x y \bar{v}$. И, наконец, третий контур охватывает две верхние строки карты с результатом $\bar{z}$. Таким образом, получаем минимальную функцию в ДНФ:

$$F_2 = \bar{x} \bar{y} \bar{v} + x y \bar{v} + \bar{z},$$

или

$$F_2 = \overline{\overline{x} \overline{y} \overline{v} \overline{x} \overline{y} \overline{v} \overline{z}}.$$

Минимальную функцию в инверсном виде находят из трех контуров, охватывающих пустые клетки:

$$\bar{F}_2 = \bar{x} y z + x \bar{y} z + z v$$

с прямым значением

$$F_2 = (x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{z} + \bar{v}),$$

или

$$F_2 = \overline{\overline{x + y + z + x + y + z + z + v}}$$

Нахождение логических функций и последующую их минимизацию широко применяют при проектировании логических схем комбинационного типа.

3 Логические элементы

3.1 Общие сведения

Для выполнения функциональных операций над дискретными сигналами при двоичном способе их представления предназначены логические элементы (узлы).

Цифровой логический элемент - это электронная схема, выполняющая некоторую логическую операцию. Логическая операция может быть отражена путем логического высказывания, математической записи и в виде таблицы истинности. Всего существует 15 логических операций. Набор простых операций, на основании которых можно реализовать любую сложную операцию, называют функционально полным [3, 8, 11].

3.2 Простые логические операции и электронные элементы их реализации

Логическая операция НЕ называется логическим отрицанием или логической инверсией.

Логическое высказывание. Сообщение ложно, если - истинно, и сообщение истинно, если - ложно.

Математическая запись $y = \bar{x}$.

Таблица истинности и электронный элемент показаны на рисунке 3.1 [3, 8, 11].

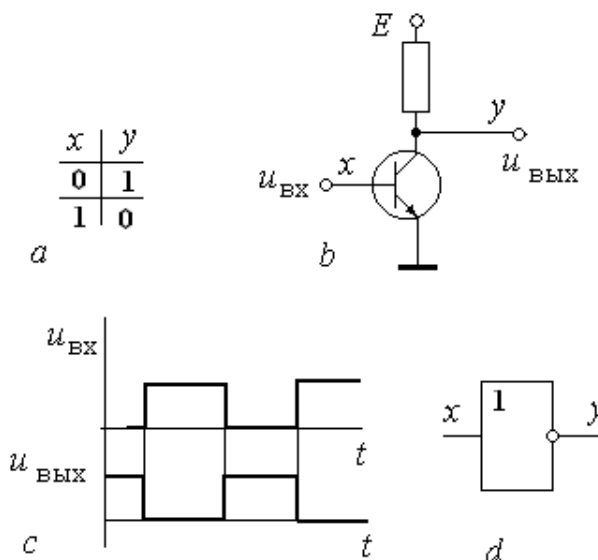


Рисунок 3.1 — Таблица истинности логической операции НЕ (a), схема электронного элемента НЕ (b), временная диаграмма работы электронного элемента (c), условное обозначение логического элемента НЕ (d)

Работа электронного элемента. Примем, что логической «1» соответствует напряжение высокого уровня, логическому «0» - напряжение низко-

го уровня. При подаче на вход элемента напряжения низкого уровня, транзистор будет закрыт, и напряжение на его коллекторе будет иметь высокий уровень, равный E , что соответствует логической «1». Если на вход элемента подать напряжение высокого уровня, то транзистор будет открыт, напряжение на его коллекторе близко к нулю, что соответствует логическому «0». Временная диаграмма (рисунок 3.1,с) отображает работу элемента при подаче на вход импульсной последовательности, из которой видно, что входной и выходной сигналы имеют противоположные уровни.

Логическая операция ИЛИ называется *логическим сложением* (дизъюнкцией), является функцией нескольких переменных.

Логическое высказывание. Сообщение y истинно, если или x_1 , или x_2 истинны, ложно, если и x_1 , и x_2 ложны.

Математическая запись $y = x_1 + x_2$.

Таблица истинности и электронный элемент показаны на рисунке 3.2.

Работа электронного элемента. При подаче напряжения высокого уровня на входы x_1 или x_2 напряжение на выходе будет иметь также высокий уровень соответствующий логической «1». Напряжение низкого уровня, соответствующее логическому «0» будет наблюдаться, когда на оба входа поданы низкие уровни напряжения, соответствующие логическому «0». Это положение отражается на временной диаграмме (рисунок 3.2, с) [3, 8, 11].

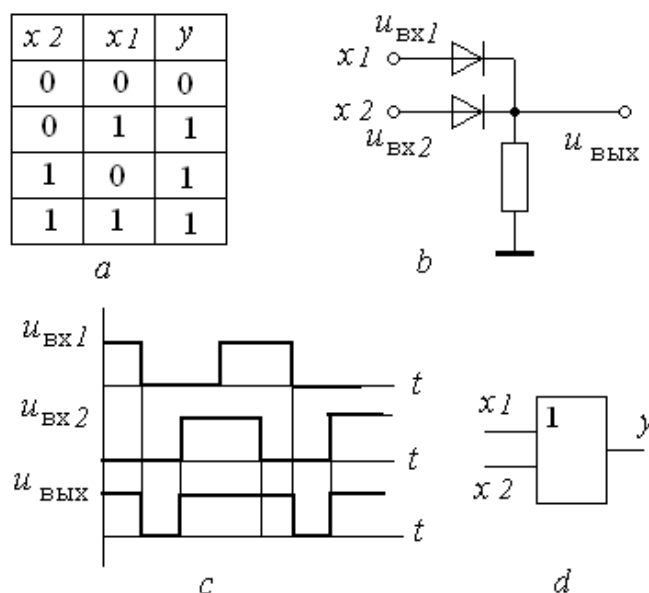


Рисунок 3.2 — Таблица истинности логической операции ИЛИ (а), электронный элемент (б), временная диаграмма работы электронного элемента (с), условное обозначение элемента ИЛИ (д)

Логическая операция И называется логическим умножением (конъюнкцией), является функцией нескольких переменных.

Логическое высказывание. Сообщение y истинно, если и x_1 , и x_2 истинны, сообщение y ложно, если или x_1 , или x_2 ложны.

Математическая запись $y = x_1 \cdot x_2$.

Таблица истинности и электронный элемент показаны на рисунке 3.3 [3, 8, 11].

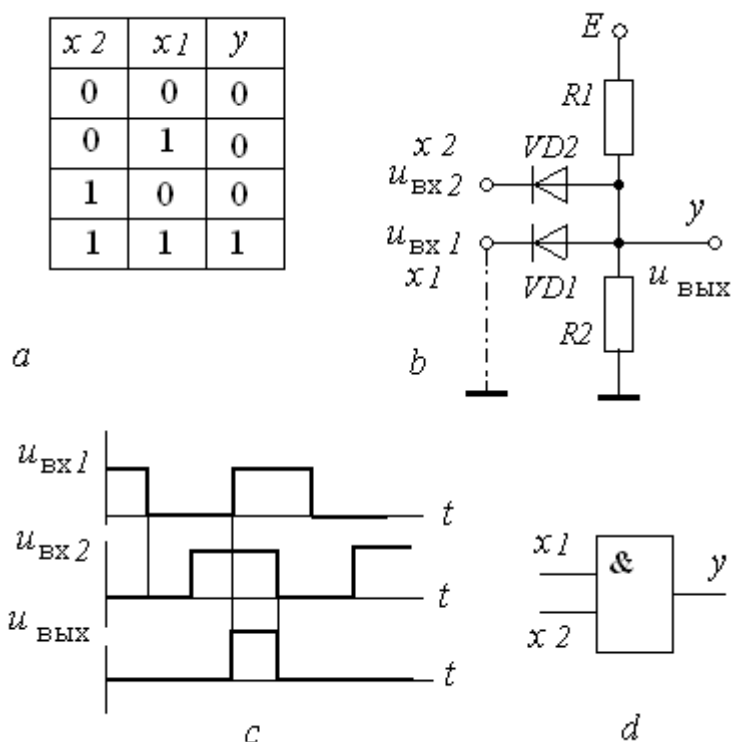


Рисунок 3.3 — Таблица истинности логической операции И (а), схема логического элемента (б), временная диаграмма работы (с), условное обозначение логического элемента И

Работа электронного элемента. При подаче напряжения высокого уровня на входы x_1 и x_2 (одновременно), напряжение на выходе будет иметь также высокий уровень, соответствующий логической «1», т. к. диоды $VD1$ и $VD2$ заперты положительными напряжениями, подаваемыми на катод. Напряжение низкого уровня, соответствующее логическому «0» будет наблюдаться на выходе, когда хотя бы на один из входов подано напряжение низкого уровня, соответствующие логическому «0». Например, если $u_{ВХ1}$ имеет низкий уровень, т.е. катод диода $VD1$ соединен с землей, то этот диод будет открыт, напряжение на выходе будет близко к нулю. Это положение отражается на временной диаграмме (рисунок 3.3,с).

Логическая операция И-НЕ. Операция Шеффера является функцией нескольких переменных.

Логическое высказывание. Сообщение y ложно только тогда, если и x_1 , и x_2 истинны, сообщение y истинно, если или x_1 , или x_2 ложны.

Математическая запись $y = \overline{x_1 \cdot x_2}$.

Таблица истинности и электронный элемент показаны на рисунке 3.4 [3, 8, 13].

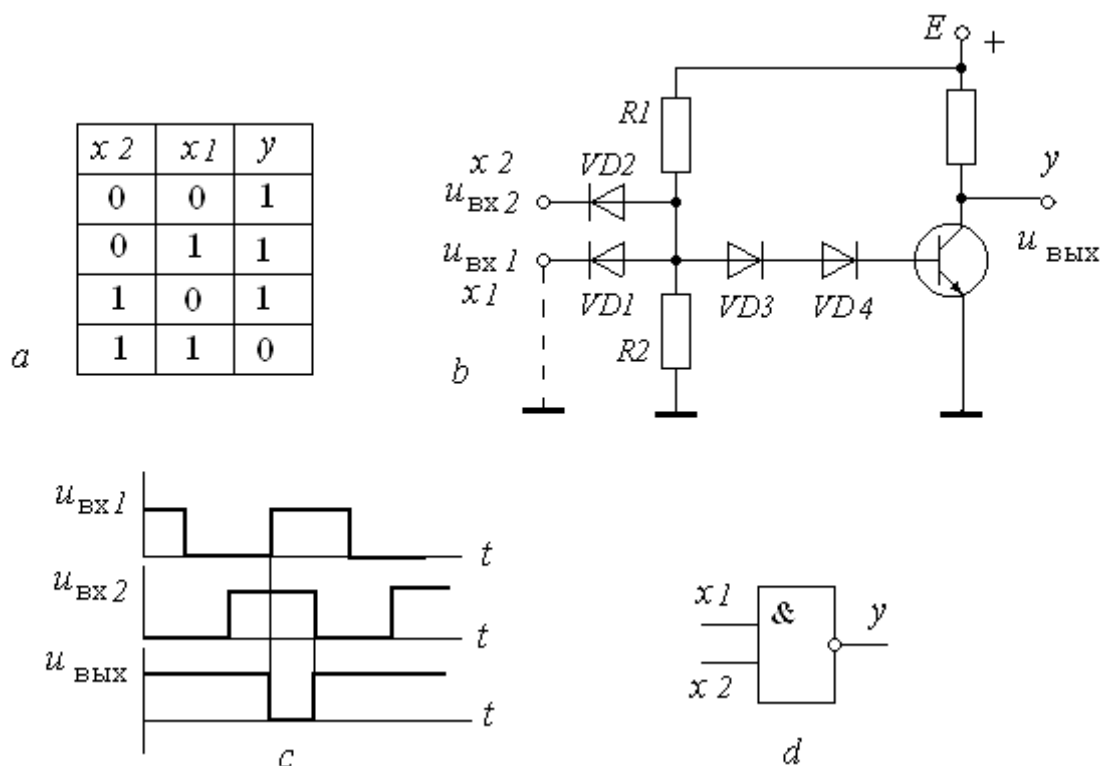


Рисунок 3.4 — Таблица истинности логической операции И-НЕ (а), схема логического элемента (б), временная диаграмма работы (с), условное обозначение логического элемента И-НЕ

Электронный элемент состоит из двух частей: элемента И и элемента НЕ.

Рассмотрим работу схемы. Если на входы x_1 и x_2 поданы сигналы, соответствующие «1», т.е. высокие уровни напряжения, то диоды VD1 и VD2 будут заперты. Ток от источника E будет протекать по пути $R1$, VD3, VD4, база VT1. Под действием этого тока транзистор открыт, напряжение на его коллекторе близко к нулю, таким образом, напряжение на выходе y имеет уровень, соответствующий логическому «0». Если на один из входов, например, на x_1 , подан сигнал, соответствующий «0» Это эквивалентно заземлению входа x_1 . Тогда ток от источника E протекает по пути E , $R1$, VD1, x_1 , земля. Ток в цепи базы транзистора равен нулю, транзистор

закрит, напряжение на коллекторе близко к E , т.е. напряжение на выходе y имеет высокий уровень, соответствующий логической «1».

Логическая операция ИЛИ-НЕ. Стрелка Пирса является функцией нескольких переменных.

Логическое высказывание. Сообщение y истинно, только тогда, если x_1 и x_2 ложны, сообщение y ложно, если или x_1 , или x_2 истинны.

Математическая запись $y = \overline{x_1 + x_2}$.

Таблица истинности и электронный элемент показаны на рисунке 3.5 [3, 8, 13].

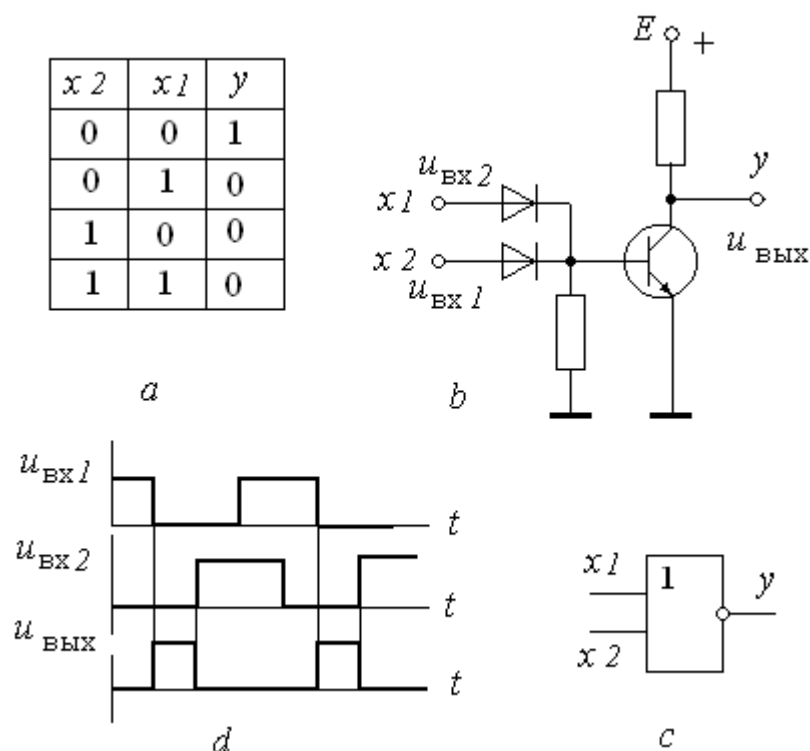


Рисунок 3.5 — Таблица истинности логической операции ИЛИ-НЕ (а), схема логического элемента (б), временная диаграмма работы (с), условное обозначение логического элемента ИЛИ-НЕ

Электронный элемент состоит из двух частей: элемента ИЛИ и инвертора.

Рассмотрим работу схемы. Если хотя бы на один из входов x_1 или x_2 поданы сигналы, соответствующие «1», то транзистор будет открыт, напряжение на выходе y будет близко к нулю, что соответствует логическому уровню «0». В случае, когда на входы x_1 и x_2 поданы низкие уровни, соответствующие логическому «0», то транзистор будет закрыт, потенциал его коллектора близок к E , напряжение на выходе y будет иметь высокий уровень, соответствующий логической «1».

3.3 Интегральные логические схемы

Логические схемы выполняются в интегральном исполнении, они могут содержать несколько логических элементов, выполняющих обычно одинаковые логические операции.

В зависимости от компонентов, используемых при реализации интегральной схемы, выделяют следующие классы логик:

- РТЛ — резисторно-транзисторная логика;
- ДТЛ — диодно-транзисторная логика;
- ТТЛ — транзисторно-транзисторная логика;
- ТТЛШ — транзисторно-транзисторная логика с диодами Шоттки;
- ЭСЛ — эмиттерно-связанная логика;
- КМОП — логика на основе комплементарных транзисторов.

В промышленной автоматике нашли широкое применение ТТЛ и КМОП логики, которые производятся в виде серий, содержащих разнообразные цифровые устройства [8, 11, 13].

Условные графические обозначения простейших логических элементов на схемах представлены на рисунке 3.6.

Логика	«НЕ»	«И»	«ИЛИ»	«И-НЕ»	«ИЛИ-НЕ»
ГОСТ и IEC	Полож.				
	Отриц.				
ANSI	Полож.				
	Отриц.				
DIN	Полож.				
	Отриц.				

Рисунок 3.6 — Условные графические обозначения простейших логических элементов на схемах

4 Применение булевой алгебры при моделировании электрических цепей в релейно-контактных схемах

4.1 Булевы операции и математическая логика

Булевы операции очень близки (хотя и не тождественны) логическим связкам в классической логике. Бит можно рассматривать как логическое суждение — его значениями являются 1 «истина» и 0 «ложь». При такой интерпретации известные в логике связки конъюнкции, дизъюнкции, импликации, отрицания и другие имеют представление на языке битов. И наоборот, битовые операции легко описываются на языке исчисления высказываний.

Однако, связкам математической логики более соответствуют логические операции в т. ч. в программировании, нежели собственно битовые операции [11–13].

4.2 Булевы операции как основа цифровой техники

Булевы операции лежат в основе обработки цифровых сигналов. Именно, посредством них можно из одного или нескольких сигналов на входе получить на выходе новый сигнал, который в свою очередь может быть подан на вход одной или несколькими такими операциями. По сути, именно булевы операции в сочетании с запоминающими элементами (например, триггерами) реализуют все различные возможности современной цифровой техники [8, 11, 13].

Булевы функции широко применяются не только при описании работы дискретных управляющих систем (контактных схем, схем из функциональных элементов, логических сетей и т.д.), но и при исследовании некоторых электрических цепей, так называемых релейно-контактных схем.

Под релейно-контактной схемой понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Оно может быть предназначено, например, для соединения (или разъединения) полюсов источника тока с некоторым потребителем. Контакты релейно-контактной схемы могут быть двух типов: замыкающие и размыкающие. Каждый контакт подключен к некоторому реле (переключателю). К одному реле может быть подключено несколько контактов — как замыкающих, так и размыкающих.

Технически реле представляет собой катушку с металлическим сердечником (магнитопроводом), вблизи которого находится соответствующий контакт. Когда через катушку пропускается электрический ток, металлический сердечник намагничивается и замыкает все находящиеся при нем замыкающие контакты. Одновременно все размыкающие контакты, относящиеся к данному реле, размыкаются. Поскольку замыкающие кон-

такты при отсутствии в реле электрического тока разомкнуты, то они называются также нормально разомкнутыми. Аналогично, размыкающие контакты называются также нормально замкнутыми. При обесточивании обмоток реле (т. е. когда реле отключается) все замыкающие контакты снова размыкаются, а все размыкающие, замыкаются.

Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная x_1 , или $x_2, \dots, x_n$, которая принимает значение 1, когда реле срабатывает, и принимает значение 0 при отключении реле. На чертеже все замыкающие контакты, подключенные к реле x , обозначаются тем же символом x , а все размыкающие контакты, подключенные к этому реле, обозначаются отрицанием $\bar{x}$. Это означает, что при срабатывании реле x все его замыкающие контакты x проводят ток и им сопоставляется значение 1, а все размыкающие контакты $\bar{x}$ не проводят электрический ток и им сопоставляется значение 0. При отключенном реле x создается противоположная ситуация: все его замыкающие контакты x разомкнуты, т.е. в этот момент им сопоставляется (переменная x принимает) значение 0, а все его размыкающие контакты $\bar{x}$ замкнуты, т. е. в этот момент им сопоставляется (другими словами, переменная $\bar{x}$ принимает значение 1).

Всей релейно-контактной схеме тогда ставится в соответствие булева переменная y , зависящая от булевых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, сопоставленным тем реле, которые участвуют в схеме. Поскольку каждый набор состояний реле $x_1, x_2, \dots, x_n$ характеризуется набором, составленным из нулей и единиц и имеющим длину n , то данная релейно-контактная схема определяет некоторое правило, по которому каждому такому набору длины n , составленному из нулей и единиц, сопоставляется либо 0, либо 1. Таким образом, каждая релейно-контактная схема, в которой занято n независимых реле (контактов в ней может быть n или больше), определяет некоторую булеву функцию y от n аргументов.

Определение. Такая булева функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *функцией проводимости* данной релейно-контактной схемы [11, 13].

Таким образом, теория булевых функций предоставляет математические модели реальных физических релейно-контактных схем.

Рассмотрим некоторые релейно-контактные схемы и найдем их функции проводимости. Пусть схема состоит из двух последовательно соединенных контактов x и y , т. е. контактов, связанных с двумя независимыми реле x и y , каждое из которых срабатывает независимо от другого:

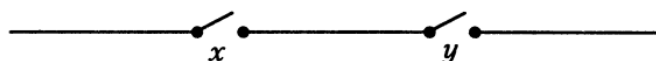


Рисунок 4.1 — Последовательное соединение контактов

Ясно, что данная схема проводит электрический ток тогда и только тогда, когда оба контакта x и y замкнуты, т.е. только тогда, когда оба переменных x и y принимают значение 1. Булева функция от двух аргументов x , y , удовлетворяющая такому условию, хорошо известна. Это конъюнкция $x \wedge y$. Таким образом, функцией проводимости релейно-контактной схемы, состоящей из двух последовательно соединенных контактов x и y , является конъюнкция $x \wedge y$. Говорят, что *последовательное соединение* двух контактов реализует конъюнкцию соответствующих этим контактам булевых переменных.

Пусть релейно-контактная схема состоит из двух параллельно соединенных контактов x и y :

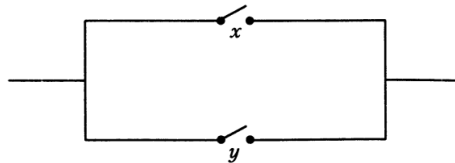


Рисунок 4.2 — Параллельное соединение контактов

Ясно, что эта схема проводит электрический ток в том и только в том случае, когда по меньшей мере один из контактов (x или y) замкнут, т.е. лишь в случае, когда хотя бы одна из булевых переменных (x или y) принимает значение 1. Булева функция от двух аргументов x и y , удовлетворяющая этому условию, также хорошо известна. Это, дизъюнкция $x \vee y$. Таким образом, функцией проводимости релейно-контактной схемы, состоящей из двух параллельно соединенных контактов x и y , является дизъюнкция $x \vee y$. Говорят, что *параллельное соединение* двух контактов реализует дизъюнкцию соответствующих этим контактам булевых переменных.

Итак, с помощью релейно-контактных схем можно реализовывать булевы функции: конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание [11, 13].

Поскольку всякая булева функция может быть описана формулой, содержащей только такие операции как конъюнкция, дизъюнкция и тесные отрицания, которые, как показано выше, реализуются на релейно-контактных схемах, то и всякая булева функция может быть реализована с помощью релейно-контактной схемы.

Составление релейно-контактных схем с заданными условиями работы называется *задачей синтеза* релейно-контактных схем и является первой важной задачей, состоящей в том, что требуется построить схему, которая проводила бы электрический ток лишь при вполне определенных задаваемых условиях. Естественно было бы выбирать для каждой булевой функции самую простую или одну из самых простых реализующих ее релейно-контактных схем. Поэтому упрощение релейно-контактных схем называется *задачей анализа* таких схем и является второй важной задачей теории релейно-контактных схем.

Определение. Две релейно-контактные схемы, составленные из одних и тех же реле, называются *равносильными*, если одна из них проводит

ток тогда и только тогда, когда другая схема проводит ток. Другими словами, две схемы, составленные из одних и тех же реле, равносильны, если они обладают одинаковыми функциями проводимости, зависящими от одних и тех же переменных. Из двух равносильных схем более простой считается та, которая содержит меньшее число контактов.

Второй подход

Определение. Контактной схемой называется неориентированный граф, каждому ребру (контакту) которого приписан символ переменной в некоторой степени и выделены две вершины, которые называются полюсами.

Пример

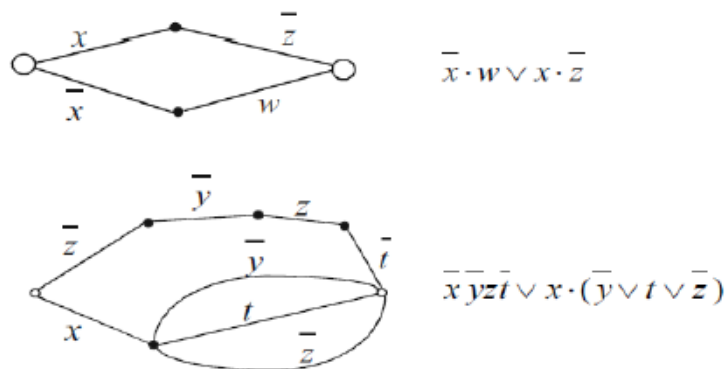


Рисунок 4.3 — Схемы примера

Определение. Ребра схемы, помеченные символами переменных или их отрицаний, называются *контактами*. Контакт называется *замыкающим*, если он помечен символом переменной, и *размыкающим*, если он помечен символом отрицания переменной [11].

Определение. Функция, определяемая следующей формулой:

$$f_{a,b}(\tilde{x}n) = V_{[a,b]} K_{[a,b]},$$

в которой дизъюнкция берется по всем простым цепям схемы, соединяющим полюса a и b , называется функцией проводимости между полюсами a, b схемы Σ .

Определение. Говорят, что схема Σ реализует функцию $g(\tilde{x}n)$, если в ней существуют полюса a и b такие, что

$$g(\tilde{x}n) = f_{a,b}(\tilde{x}n).$$

Определение. Контактная схема с $k+1$ полюсами называется (l, k) -полюсником, реализующим функции $g_1(\tilde{x}_n), \dots, g_k(\tilde{x}_n)$, если существуют полюс a и полюса $b_i (1 \leq i \leq k)$ такие, что $f_{a,b_i}(\tilde{x}_n) = g_i(\tilde{x}_n)$.

Определение. При изображении $(1, k)$ -полюсников полюс a изображается светлым кружком и называется *входом*, полюса b_i изображаются двойными кружками и называются *выходами*, остальные вершины изображаются темными кружками.

В тех случаях, когда число полюсов схемы не указывается, речь всегда будет идти о двухполюсных контактных схемах.

Определение. Две контактные схемы называются *эквивалентными*, если они реализуют одну и ту же булеву функцию или одну и ту же систему функций.

Определение. *Сложностью* контактной схемы называется число ее контактов.

Определение. Контактная схема, имеющая наименьшую сложность среди всех эквивалентных ей схем, называется *минимальной* [11, 13].

5 Проверочный материал

5.1 Тест 1. Позиционные системы счисления

Студент должен:

- знать формулу представления чисел в любой системе счисления и смысл входящих в неё параметров;
- уметь представлять и переводить числа в любые системы счисления.

Форма заданий: выбор одного правильного ответа из предложенных.

1)

Десятичное число 15 в двоичной системе счисления имеет значение...

- а) 01111;
- б) 11111;
- в) 11110;
- г) 011110.

2)

Десятичное число 59 в двоичной системе счисления имеет значение...

- а) 0111011;
- б) 01110110;
- в) 111010;
- г) 1011011.

3)

Двоичное число 10101000 в десятичной системе счисления имеет значение...

- а) 168;
- б) 132;
- в) 181;
- г) 170.

4)

Десятичное число 751 в двоично-десятичной форме имеет значение...

- а) 11101010001;
- б) 011110010001;
- в) 111001010101;
- г) 001101010001.

5)

Двоично-десятичное число 101011001 в десятичной системе счисления имеет значение...

а) 159;

б) 169;

в) 241;

г) 359.

6)

Двоичное число 010011110 в восьмеричной системе счисления имеет значение...

а) 236;

б) 041;

в) 382;

г) 036.

5.2 Тест 2. Табличное представление логических функций

Студент должен:

- знать аксиомы алгебры логики, логические функции распространённых элементов интегрального исполнения и смысл входящих в них параметров, условные графические обозначения логических элементов;

- уметь представлять условное графическое обозначение логического элемента и составлять таблицу состояния логической функции, исполняемой данным элементом.

Форма заданий: выбор одного правильного ответа из предложенных.

1)

Логическая функция повторения имеет таблицу состояния вида...

а)

x	y
0	0
1	1

б)

x	y
0	0
1	0

в)

x	y
0	1
1	0

г)

x	y
0	1
1	1

2)

Логическая функция инверсии имеет таблицу состояния вида...

а)

x	y
0	1
1	0

б)

x	y
0	1
1	1

в)

x	y
0	0
1	0

г)

x	y
0	0
1	1

3)

Логическая функция дизъюнкции имеет таблицу состояния вида...

а)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

б)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

в)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

г)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4)

Логическая функция конъюнкции имеет таблицу состояния вида...

а)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

б)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

в)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

г)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

5)

Логическая функция сумма по модулю два имеет таблицу состояния вида...

а)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

б)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

в)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

г)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6)

Логическая функция эквивалентности имеет таблицу состояния вида...

а)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

б)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

в)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

г)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

7)

Логическая функция дизъюнкции с инверсией имеет таблицу состояния вида...

а)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

б)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

в)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

г)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

8)

Логическая функция конъюнкции с инверсией имеет таблицу состояния вида...

а)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

б)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

в)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

г)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

9)

Логическая функция $y = x_1 \cdot \overline{x_2}$ имеет таблицу состояния вида...

а)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

б)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

в)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

г)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

10)

Логическая функция $y = \overline{x_1} + x_2$ имеет таблицу состояния вида...

а)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

б)

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

в)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

г)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

11)

Логическая функция $y = \overline{x_1} + \overline{x_2}$ имеет таблицу состояния вида...

а)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

б)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

в)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

г)

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

5.3 Тест 3. Аналитическое представление логических функций

Студент должен:

- знать дизъюнктивную и конъюнктивную формы аналитической записи логической функции по заданной таблице состояния и смысл входящих в эти формы термов;

- уметь записывать аналитические выражения логических функций в любой форме.

Форма заданий: выбор одного правильного ответа из предложенных.

1)

В ниже приведённой таблице задана таблица состояния логической функции.

x	y
0	0
1	1

Аналитическое выражение логической функции имеет вид...

а) $y = x$;

б) $y = \bar{x}$;

в) $y = \bar{\bar{x}}$;

г) $y = x + \bar{x}$.

2)

В ниже приведённой таблице задана таблица состояния логической функции.

x	y
0	1
1	0

Аналитическое выражение логической функции имеет вид...

а) $y = \bar{\bar{x}}$;

б) $y = \bar{x}$;

в) $y = x$;

г) $y = x \cdot x$.

3)

В ниже приведённой таблице задана таблица состояния логической функции.

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Аналитическое выражение логической функции имеет вид...

а) $y = x_1 + x_2$;

б) $y = x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2$;

в) $y = \overline{x_1} + \overline{x_2}$;

г) $y = x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$.

4)

В ниже приведённой таблице задана таблица состояния логической функции.

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Аналитическое выражение логической функции имеет вид...

а) $y = x_1 \cdot x_2$;

б) $y = (x_1 + x_2) \cdot (\overline{x_1} + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2})$;

в) $y = \overline{x_1} \cdot x_2$;

г) $y = (\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_1} + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2})$.

5)

В ниже приведённой таблице задана таблица состояния логической функции.

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Аналитическое выражение логической функции имеет вид...

- а) $y = x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2$;
 б) $y = (x_1 + x_2) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2})$;
 в) $y = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2$;
 г) $y = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2})$.

6)

В ниже приведённой таблице задана таблица состояния логической функции.

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Аналитическое выражение логической функции имеет вид...

- а) $y = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_1 \cdot x_2$;
 б) $y = (\overline{x_1} + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2})$;
 в) $y = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2$;
 г) $y = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2})$.

7)

В ниже приведённой таблице задана таблица состояния логической функции.

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Аналитическое выражение логической функции имеет вид...

- а) $y = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$;
 б) $y = (\overline{x_1} + x_2) \cdot (\overline{x_1} + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2})$;
 в) $y = \overline{x_1} \cdot x_2$;
 г) $y = (x_1 + x_2) \cdot (\overline{x_1} + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2})$.

8)

В ниже приведённой таблице задана таблица состояния логической функции.

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Аналитическое выражение логической функции имеет вид...

а) $y = \overline{x_1} + \overline{x_2}$;

б) $y = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2}$;

в) $y = x_1 + x_2$;

г) $y = x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2}$.

9)

В ниже приведённой таблице задана таблица состояния логической функции.

x_2	x_1	y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Аналитическое выражение логической функции имеет вид...

а) $y = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2$;

б) $y = (\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_1} + x_2)$;

в) $y = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_1 \cdot \overline{x_2}$;

г) $y = (\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot (x_1 + \overline{x_2})$.

10)

В ниже приведённой таблице задана таблица состояния логической функции.

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Аналитическое выражение логической функции имеет вид...

- а) $y = x_1 \cdot \overline{x_2} + x_1 \cdot x_2$;
б) $y = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2})$;
в) $y = x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2$;
г) $y = (\overline{x_1} + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2})$.

11)

В ниже приведённой таблице задана таблица состояния логической функции.

x_2	x_1	y
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Аналитическое выражение логической функции имеет вид...

- а) $y = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2$;
б) $y = (x_1 + x_2) \cdot (\overline{x_1} + x_2)$;
в) $y = x_1 \cdot \overline{x_2} + x_1 \cdot x_2$;
г) $y = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2})$.

5.4 Тест 4. Аксиомы и законы алгебры логики

Студент должен:

- знать основные аксиомы и законы алгебры логики;
- уметь доказывать справедливость логических тождеств и правильно использовать их при аналитической минимизации.

Форма заданий: выбор одного правильного ответа из предложенных.

1)

Отметить справедливость указанных ниже тождеств...

- а) $1+1=1$;

- б) $0 \cdot 0 = 0$;
в) $0 + 0 = 1$;
г) $1 \cdot 1 = 0$.

2)

Отметить справедливость указанных ниже тождеств...

- а) $0 + 0 = 0$;
б) $1 \cdot 1 = 1$;
в) $1 + 1 = 0$;
г) $0 \cdot 0 = 1$.

3)

Отметить справедливость указанных ниже тождеств...

- а) $0 + 1 = 1 + 0 = 1$;
б) $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$;
в) $1 + 0 = 0 + 1 = 0$;
г) $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 1$.

4)

Отметить справедливость указанных ниже тождеств...

- а) $\bar{0} = 1$;
б) $\bar{1} = 0$;
в) $\bar{0} = 0$;
г) $\bar{1} = 1$.

5)

Отметить справедливость указанных ниже тождеств...

- а) $x + x = x$;
б) $x \cdot x = x$;
в) $x + x = 0$;
г) $x \cdot x = 1$.

6)

Отметить справедливость указанных ниже тождеств...

- а) $x + \bar{x} = 1$;
б) $x \cdot \bar{x} = 0$;
в) $x + \bar{x} = x$;
г) $x \cdot \bar{x} = \bar{x}$.

7)

Отметить справедливость указанных ниже тождеств...

а) $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$;

б) $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$;

в) $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$;

г) $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$.

8)

Отметить справедливость указанных ниже тождеств...

а) $x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1$;

б) $x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_1$;

в) $x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_2$;

г) $x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_2$.

9)

Отметить справедливость указанных ниже тождеств...

а) $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2} = x_1$;

б) $(x_1 + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2}) = x_1$;

в) $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2} = x_2$;

г) $(x_1 + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2}) = x_2$.

10)

Отметить справедливость указанных ниже тождеств...

а) $0 + x = x$;

б) $1 \cdot x = x$;

в) $0 + x = 0$;

г) $1 \cdot x = 1$.

11)

Отметить справедливость указанных ниже тождеств...

а) $1 + x = 1$;

б) $0 \cdot x = 0$;

в) $1 + x = x$;

г) $0 \cdot x = x$.

5.5 Тест 5. Минимизация логических функций

Студент должен:

- знать аксиомы и законы алгебры логики, метод минимизирующих карт, метод Карно;

- уметь выполнять минимизацию логических функций.

Форма заданий: выбор одного правильного ответа из предложенных.

1)

После минимизации логическая функция $y = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2$ имеет вид...

а) $y = x_1 \cdot x_2$;

б) $y = x_1 \cdot x_2$;

в) $y = x_1$;

г) $y = x_2$.

2)

Задана логическая функция в виде карты Карно.

		$x_1 x_2$			
		00	01	11	10
x_3	0	1	0	0	1
	1	1	1	0	1

После минимизации аналитическое выражение логической функции имеет вид...

а) $y = x_2 + x_1 \cdot x_3$;

б) $y = x_2 + x_1 \cdot x_3$;

в) $y = x_2 + x_1 \cdot x_3$;

г) $y = x_2 + x_1 \cdot x_3$.

3)

Логическая функция задана таблицей состояния. Для минимизации используется метод минимизирующих карт (неопределённых коэффициентов).

x_3	x_2	x_1	y	Термы 3 го ранга	Термы 2 го ранга			Термы 1- го ранга		
0	0	0	0	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$
0	0	1	1	$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	$x_1 \cdot \overline{x_2}$	$x_1 \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	x_1	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$
0	1	0	0	$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_1} \cdot x_2$	$\overline{x_1} \cdot x_3$	$x_2 \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_1}$	x_2	$\overline{x_3}$
0	1	1	1	$x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_3$	$x_2 \cdot \overline{x_3}$	x_1	x_2	$\overline{x_3}$
1	0	0	0	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$	$\overline{x_1} \cdot x_3$	$\overline{x_2} \cdot x_3$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	x_3
1	0	1	1	$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$	$x_1 \cdot \overline{x_2}$	$x_1 \cdot x_3$	$\overline{x_2} \cdot x_3$	x_1	$\overline{x_2}$	x_3
1	1	0	0	$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$	$\overline{x_1} \cdot x_2$	$\overline{x_1} \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_3$	$\overline{x_1}$	x_2	x_3
1	1	1	1	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_3$	x_1	x_2	x_3

Полученное после минимизации выражение логической функции имеет вид...

а) $y = \overline{x_1}$;

б) $y = x_1$;

в) $y = x_1 \cdot x_3$;

г) $y = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2}$.

4)

После минимизации логическая функция $y = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ имеет вид...

а) $y = \overline{x_1}$;

б) $y = x_1$;

в) $y = x_1 \cdot x_3$;

г) $y = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2}$.

5)

После минимизации логическая функция $y = \overline{x_1 \cdot x_2} + \overline{x_1 \cdot x_3}$ имеет вид...

а) $y = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$;

б) $y = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$;

в) $y = \overline{x_1 + x_2 + x_3}$;

г) $y = \overline{x_1 + x_2 + x_3}$.

6)

Задана логическая функция в виде карты Карно.

		x_1x_2			
		00	01	11	10
x_3	0	0	1	1	0
	1	0	1	*	*

После минимизации аналитическое выражение логической функции имеет вид...

а) $y = \overline{x_2}$;

б) $y = \overline{x_1}$;

в) $y = \overline{x_2}$;

г) $y = \overline{x_1} \cdot x_2$.

7)

Логическая функция задана таблицей состояния. Для минимизации используется метод минимизирующих карт (неопределённых коэффициентов).

x_3	x_2	x_1	y	Термы 3 го ранга	Термы 2 го ранга			Термы 1- го ранга		
0	0	0	1	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$
0	0	1	1	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$	$\overline{x_1} \cdot x_3$	$\overline{x_2} \cdot x_3$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	x_3
0	1	0	0	$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_1} \cdot x_2$	$\overline{x_1} \cdot x_3$	$x_2 \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_1}$	x_2	$\overline{x_3}$
0	1	1	0	$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$	$\overline{x_1} \cdot x_2$	$\overline{x_1} \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_3$	$\overline{x_1}$	x_2	x_3
1	0	0	1	$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	$x_1 \cdot \overline{x_2}$	$x_1 \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	x_1	$\overline{x_2}$	$\overline{x_3}$
1	0	1	1	$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$	$x_1 \cdot \overline{x_2}$	$x_1 \cdot x_3$	$\overline{x_2} \cdot x_3$	x_1	$\overline{x_2}$	x_3
1	1	0	0	$x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_3$	$x_2 \cdot \overline{x_3}$	x_1	x_2	$\overline{x_3}$
1	1	1	0	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_3$	x_1	x_2	x_3

Полученное после минимизации выражение логической функции имеет вид...

а) $y = \overline{x_2}$;

б) $y = x_2$;

в) $y = x_2 \cdot x_3$;

г) $y = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2$.

8)

После минимизации логическая функция $y = (\overline{x_1 + x_2}) \cdot (\overline{x_1 + x_3})$ имеет вид...

а) $y = \overline{x_1 + x_2 + x_3}$;

б) $y = \overline{x_1 + x_2 + x_3}$;

в) $y = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$;

г) $y = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$.

9)

После минимизации логическая функция $y = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} + \overline{x_1 \cdot x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$ имеет вид...

а) $y = \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_3$;

б) $y = \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_3$;

в) $y = \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_3$;

г) $y = \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_3$.

10)

После минимизации логическая функция $y = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} + \overline{x_1 \cdot x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$ имеет вид...

а) $y = \overline{x_1}$;

б) $y = \overline{x_1}$;

в) $y = \overline{x_1} \cdot \overline{x_3}$;

г) $y = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$.

11)

После минимизации логическая функция $y = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} + \overline{x_1 \cdot x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$ имеет вид...

а) $y = \overline{x_2}$;

б) $y = \overline{x_2}$;

в) $y = \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$;

г) $y = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$.

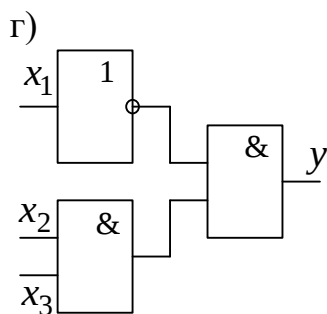
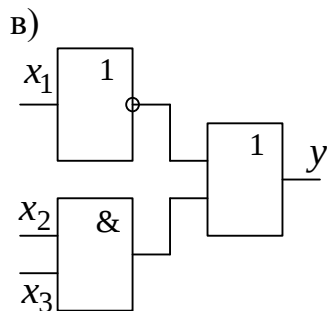
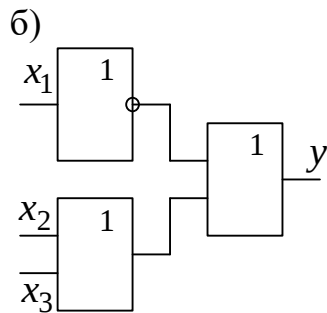
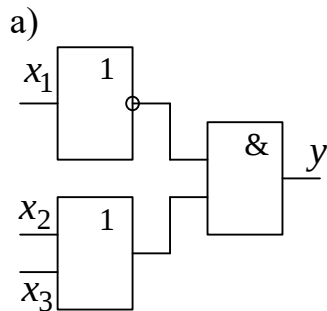
5.6 Тест 6. Разработка функциональной схемы логического устройства по аналитическому выражению логической функции

Студент должен:

- знать аналитические выражения логических функций основных логических элементов и их условное графическое обозначение;
 - уметь разрабатывать функциональные схемы логических устройств.
- Форма заданий: выбор одного правильного ответа из предложенных.

1)

Разработать функциональную схему реализации логической функции $y = \bar{x}_1 \cdot (x_2 + x_3)$. Функциональная схема имеет вид...

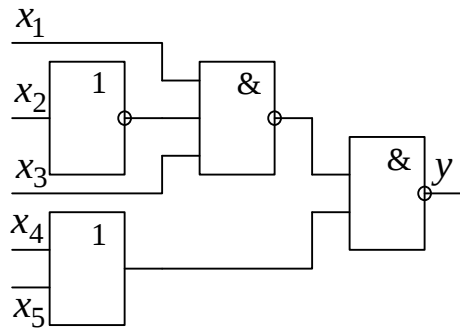


2)

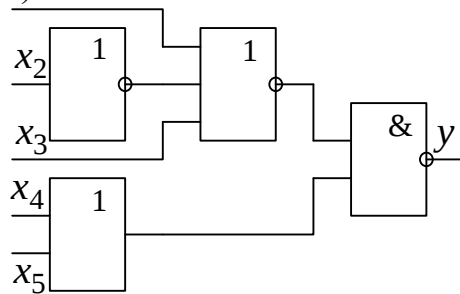
Разработать функциональную схему реализации логической функции

$$y = \overline{(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)} \cdot (x_4 + x_5) \quad . \text{ Функциональная схема имеет вид...}$$

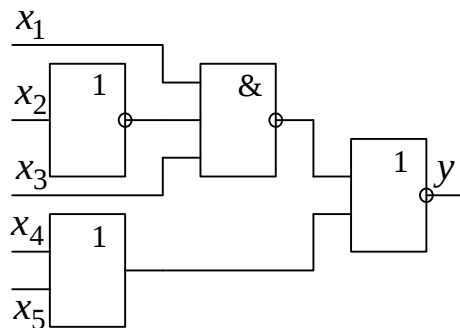
а)



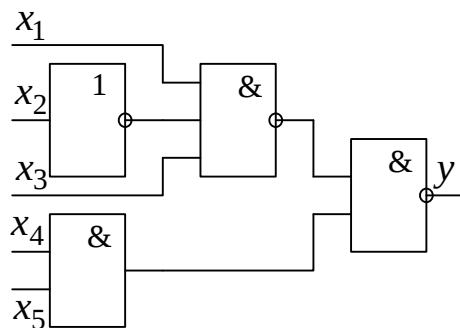
б)



в)



г)

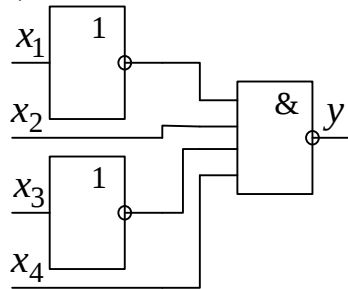


3)

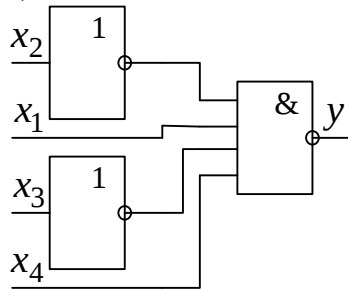
Разработать функциональную схему реализации логической функции

$y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$. Функциональная схема имеет вид...

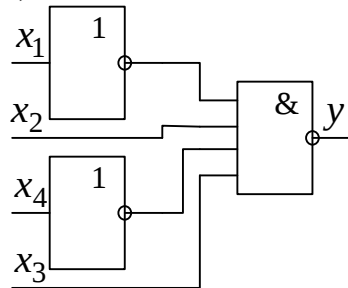
а)



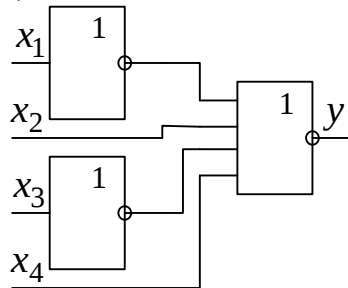
б)



в)



г)

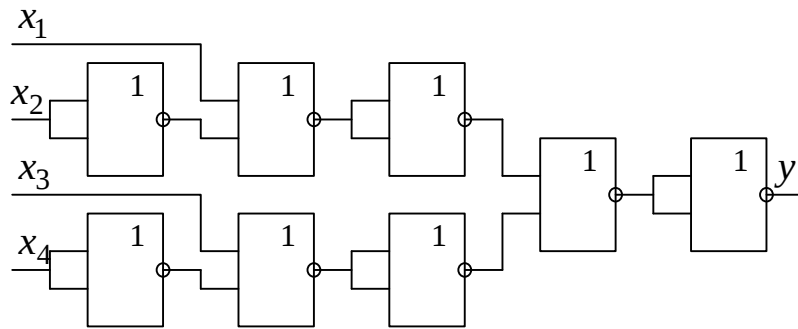


4)

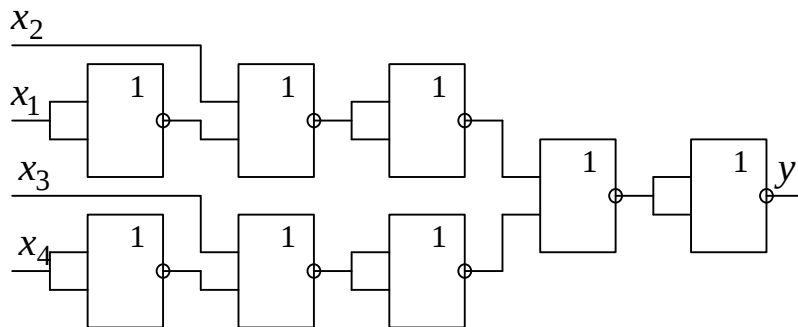
Разработать функциональную схему реализации логической функции

$y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ в базе 2ИЛИ-НЕ. Функциональная схема имеет вид...

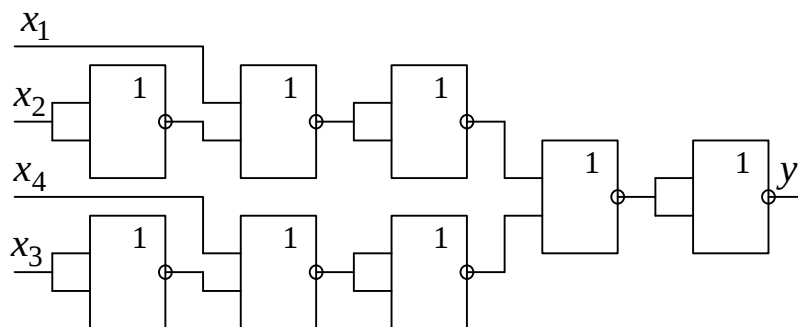
а)



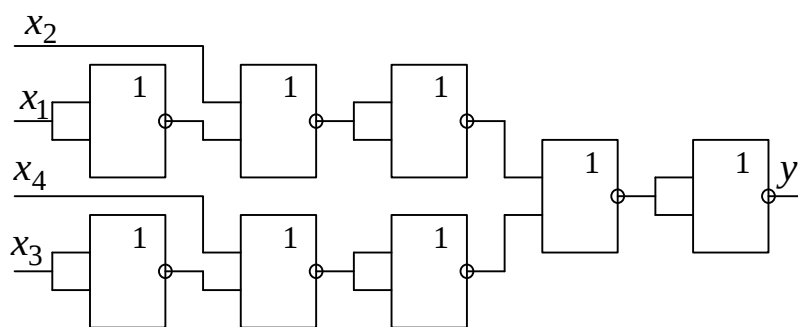
б)



в)



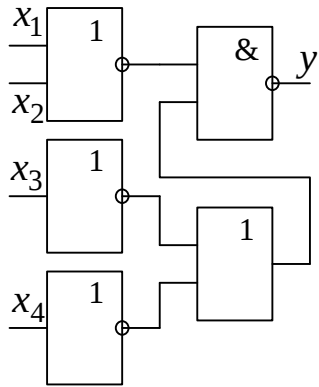
г)



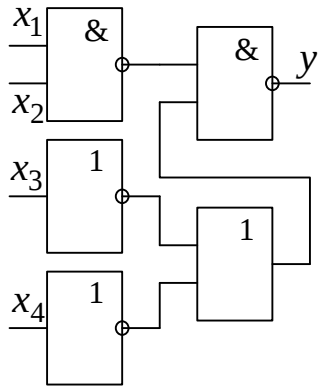
5)

Разработать функциональную схему реализации логической функции $y = \overline{(x_1 + x_2)} \cdot \overline{(x_3 + x_4)}$. Функциональная схема имеет вид...

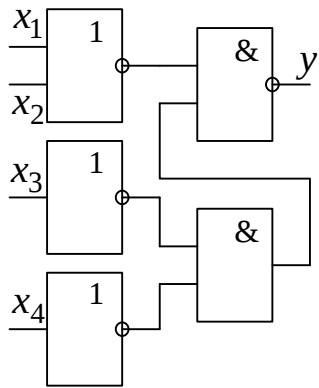
a)



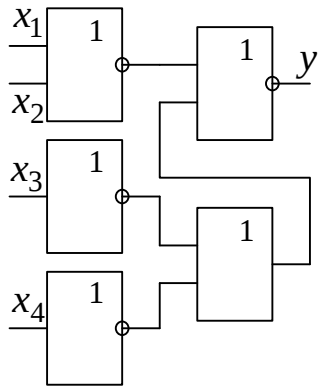
б)



в)



г)

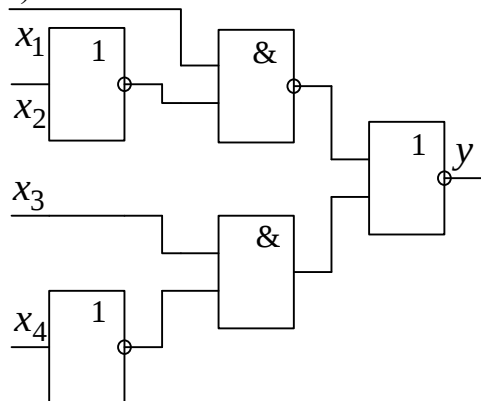


6)

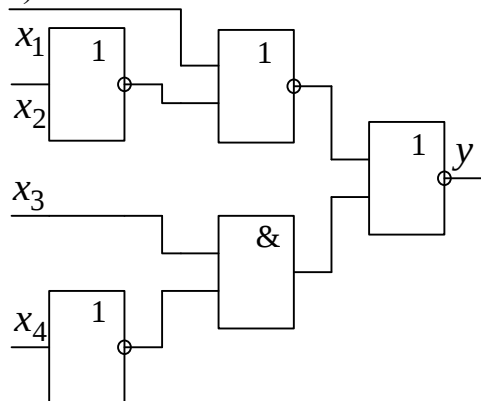
Разработать функциональную схему реализации логической функции

$y = \overline{x_1 \cdot x_2} + x_3 \cdot \overline{x_4}$. Функциональная схема имеет вид...

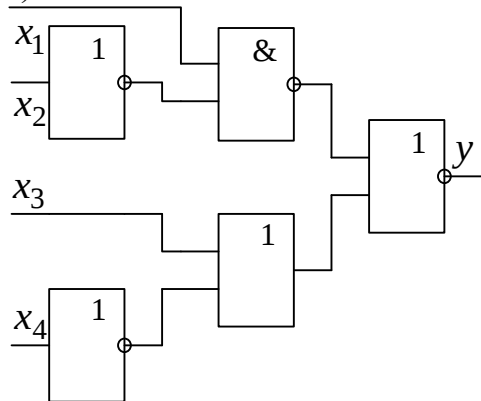
а)

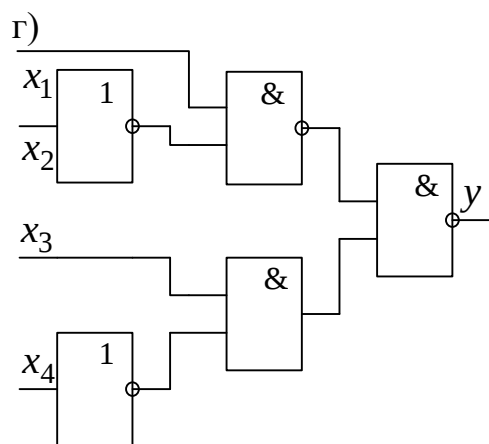


б)



в)



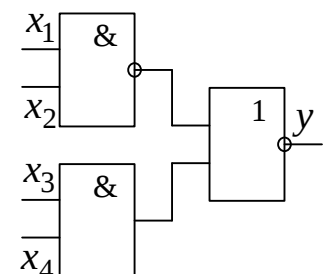


7)

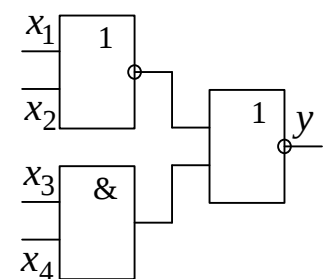
Разработать функциональную схему реализации логической функции

$y = x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4$. Функциональная схема имеет вид...

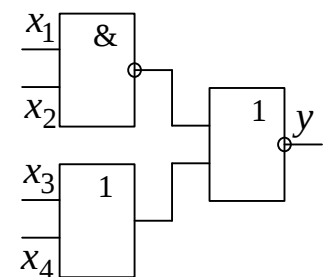
а)



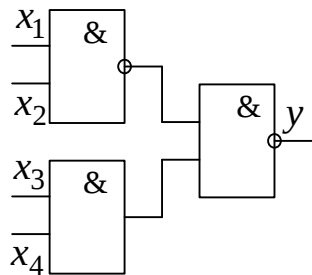
б)



в)



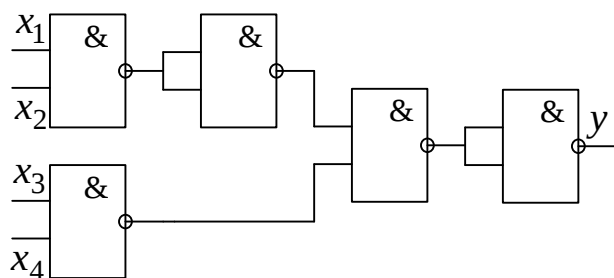
г)



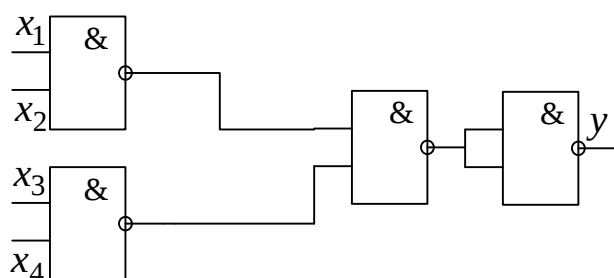
8)

Разработать функциональную схему реализации логической функции $y = x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4$ в базе 2И-НЕ. Функциональная схема имеет вид...

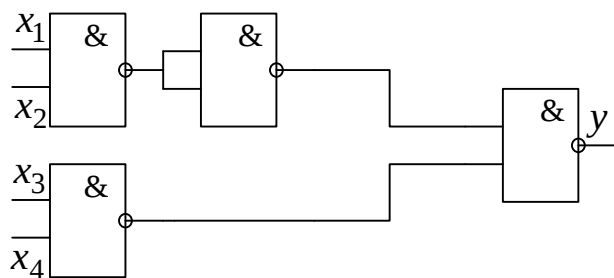
а)



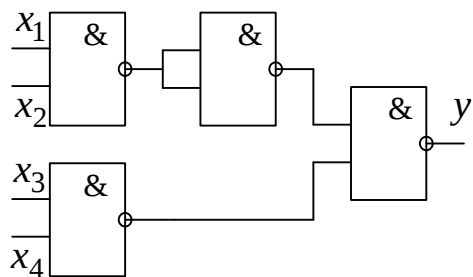
б)



в)



г)

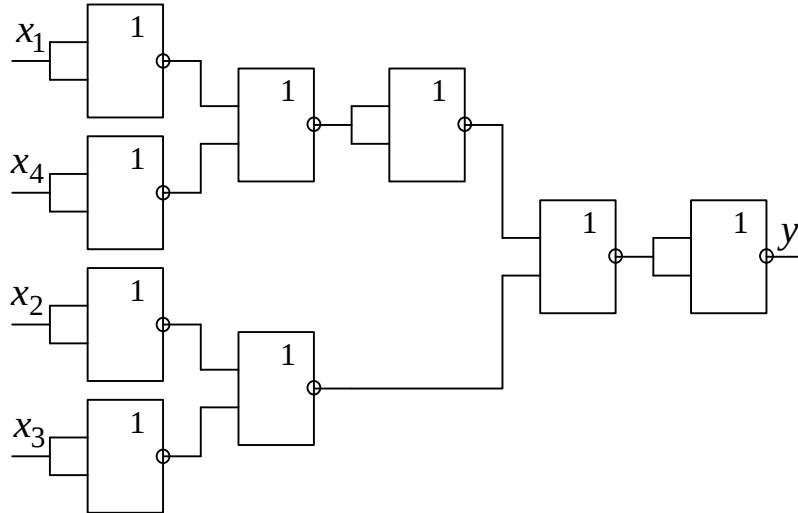


9)

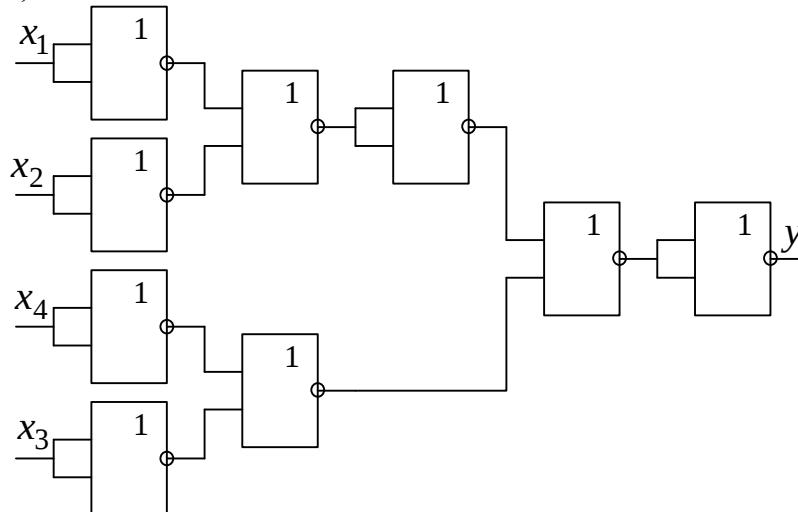
Разработать функциональную схему реализации логической функции

$y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ в базе 2ИЛИ-НЕ. Функциональная схема имеет вид...

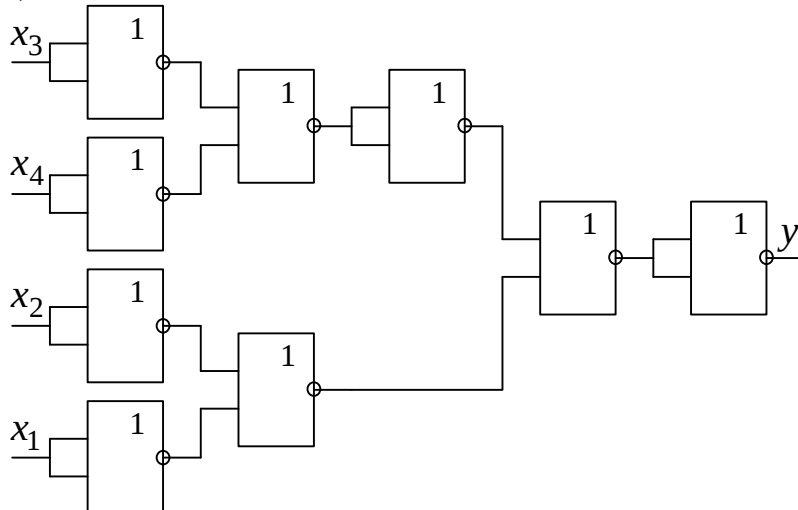
а)

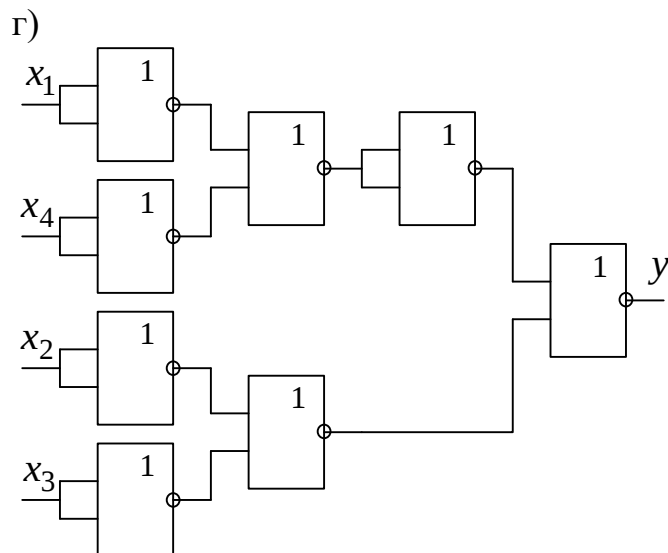


б)



в)



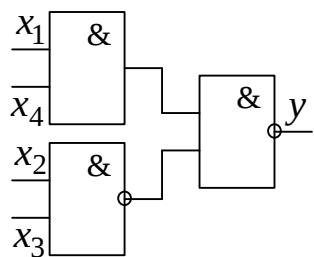


10)

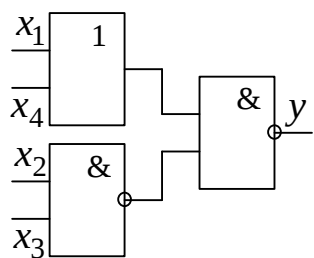
Разработать функциональную схему реализации логической функции

$y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$. Функциональная схема имеет вид...

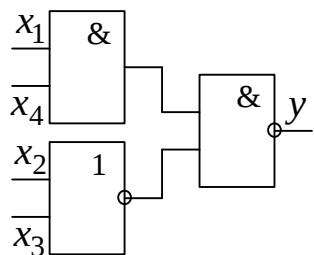
а)



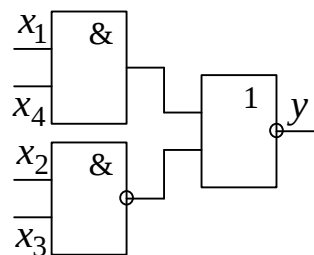
б)



в)



г)

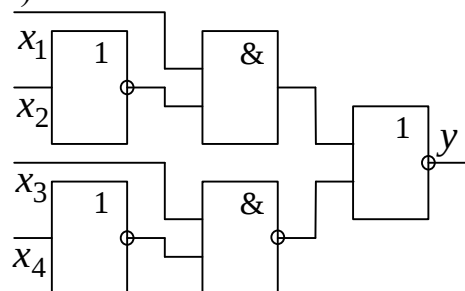


11)

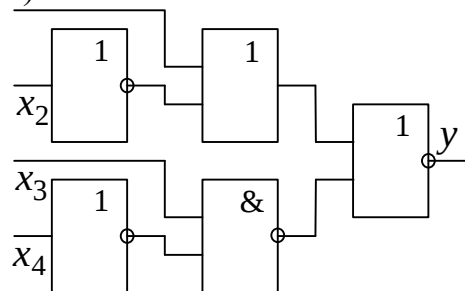
Разработать функциональную схему реализации логической функции

$y = \overline{x_1 \cdot x_2} + \overline{x_3 \cdot x_4}$. Функциональная схема имеет вид...

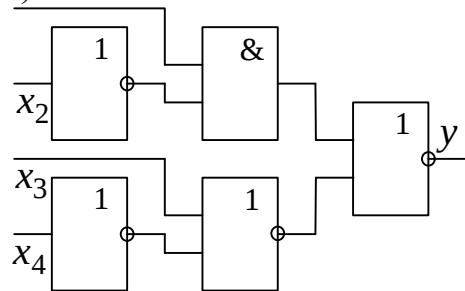
а)



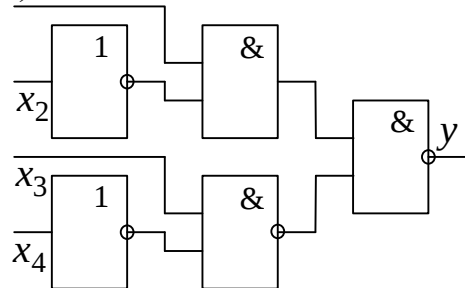
б)



в)



г)



Рекомендуемая литература

Основная литература

- 1) Берикашвили, В. Ш. Электроника и микроэлектроника: импульсная и цифровая электроника: учебное пособие для вузов / В. Ш. Берикашвили. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 242 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-05543-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/515270> (дата обращения: 16.02.2024).
- 2) Поляков, К.Ю. Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие; СПбГМТУ. — СПб.: 2006. — 161 с.
- 3) Музылева, И.В. Элементная база для построения цифровых систем управления: Учебное пособие для вузов. — М.: Техносфера, 2006. — 137 с.: ил.
- 4) Скорубский, В. И. Математическая логика: учебник и практикум для СПО / В. И. Скорубский, В. И. Поляков, А. Г. Зыков. — М.: Издательство Юрайт, 2019. — 211 с. — (Серия: Профессиональное образование).
- 5) Спирина, М.С. Дискретная математика: Учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин — М.: Издательский центр «Академия», 2004 г.— 368с.
- 6) Аляев, Ю.А. Дискретная математика и математическая логика: учебник / Ю.А. Аляев, С.Ф. Тюрин. — Москва: Финансы и статистика, 2006. — 368 с.

Дополнительная литература

- 7) Каган, Б. М. Электронные вычислительные машины и системы: учебное пособие для вузов / Б. М. Каган. — М.: Энергоатомиздат, 1991. — 592 с.: ил. — ISBN 5-283-01531-9.
- 8) Справочник по цифровой вычислительной технике; Электронные вычислительные машины и системы / Б. Н. Малиновский, В. Я. Александров, В. П. Боюн и др.; под ред. Б. Н. Малиновского. — Киев: Техніка, 1980. — 320 с.: ил. — Авторы указаны в конце книги. — Библиогр.: с. 306-313. — Предм. указ.: с. 314-317.
- 9) Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов/ Учебник для студентов и программистов — СПб.: Питер, 2001 г. — 304с.
- 10) Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. Математическая логика: Курс лекций — СПб.: Издательство «Лань», 1998г., 285с.

11) Поспелов, Дмитрий Александрович. Логические методы анализа и синтеза схем / Д. А. Поспелов .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Энергия, 1974 .— 367 с. : ил. — Библиогр.: с. 361-365.

12) Макоха, А.Н. Дискретная математика: учебное пособие / А.Н. Макоха, П.А. Сахнюк, Н.И. Червяков. — Москва: ФИЗМА-ТЛИТ, 2005. — 368 с.

13) Лысиков, Б.Г. Арифметические и логические основы цифровых автоматов: Учебник для вузов по специальности «Электронные вычислительные машины». 2-е издание, переработанное и дополненное. Мн: Издательство «Вышэйшая школа», 1980 г.— 336 с. ил.

Приложение А

(обязательное)

Правила чтения формул

Порядок выполнения (приоритет операций) если отсутствуют скобки:

- 1) отрицание;
- 2) конъюнкция;
- 3) дизъюнкция;
- 4) дизъюнкция в исключаящем смысле;
- 5) импликация;
- 6) эквиваленция.

Одинаковые операции, записанные без скобок, выполняются последовательно слева на права.

Отрицание применяется ко всей части формулы, записанной под знаком.

Необходимо учитывать скобки.

Формулы $\Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются *равносильными*, ($A \equiv B$) если они принимают одинаковые значения истинности при каждом наборе переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$

Обозначение $\Phi_1 \equiv \Phi_2$

Формула $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *тождественно истинной* (или законом логики) если она принимает значение 1 при любом наборе значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Формула $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *тождественно ложной* (или противоречием), если она принимает значение 0 при любом наборе значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Формула $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *выполнимой*, если она принимает значение 1 хотя бы при одном наборе значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Приложение Б

(обязательное)

Равносильные формулы

Две формулы алгебры логики называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в них элементарных высказываний.

Равносильность формул L_1 и L_2 обозначается как $L_1 \equiv L_2$.

Основные равносильности:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1 $x \& 0 \equiv 0$, | 7 $x \vee 0 \equiv x$, |
| 2 $x \& 1 \equiv x$, | 8 $x \vee 1 \equiv 1$, |
| 3 $x \& x \equiv x$, | 9 $x \vee x \equiv x$, |
| 4 $x \& \bar{x} \equiv 0$, | 10 $x \vee \bar{x} \equiv 1$, |
| 5 $x \& (y \vee x) \equiv x$, | 11 $\bar{\bar{x}} \equiv x$. |
| 6 $x \vee y \& x \equiv x$, | |

Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

- | | |
|---|---|
| 1 $\overline{x \& y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$, | 4 $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y}$, |
| 2 $x \& y \equiv \overline{\overline{x \vee y}}$, | 5 $x \vee y \equiv \overline{\overline{x \& y}}$, |
| 3 $x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y$, | 6 $x \leftrightarrow y \equiv (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$. |

Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

- | | |
|---|---|
| 1 $x \& y \equiv y \& x$, | 4 $x \vee y \equiv y \vee x$, |
| 2 $x \& (y \& z) \equiv (x \& y) \& z$, | 5 $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$, |
| 3 $x \& (y \vee z) \equiv x \& y \vee x \& z$, | 6 $x \vee y \& z \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$. |

Приложение В
(обязательное)
Ответы тестов

Вопрос	Ответ	Вопрос	Ответ
--------	-------	--------	-------

Тест 1. Позиционные системы счисления

1	a	4	a
2	a	5	a
3	a	6	a

Тест 2. Табличное представление логических функций

1	a	6	a
2	a	7	a
3	a	8	a
4	a	9	a
5	a	10	a
		11	a

Тест 3. Аналитическое представление логических функций

1	a, б	6	a, б
2	a, б	7	a, б
3	a, б	8	a, б
4	a, б	9	a, б
5	a, б	10	a, б
		11	a, б

Тест 4. Аксиомы и законы алгебры логики

1	a, б	6	a, б
2	a, б	7	a, б
3	a, б	8	a, б
4	a, б	9	a, б
5	a, б	10	a, б
		11	a, б

Тест 5. Минимизация логических функций

1	a	6	a
2	a	7	a
3	a	8	a
4	a	9	a
5	a	10	a
		11	a

Тест 6. Разработка функциональной схемы логического устройства по аналитическому выражению логической функции

1	a	6	a
2	a	7	a
3	a	8	a
4	a	9	a
5	a	10	a
		11	a